Análisis matemático, de los Prof. Belcredi, Zambra y Deferrari. Ediciones de la Plaza.

**10** Demuestra que las funciones definidas por las fórmulas siguientes son biyecciones y halla sus funciones inversas.

$f\colon [3; +\infty] \to \mathbb{R}^- \quad f(x) = -\sqrt{x-3}$.

$g\colon \mathbb{R}^- \to [-\infty; 5] \quad g(x) = -x^2 + 5$.

**11** Demuestra que las funciones definidas por las fórmulas siguientes son biyecciones y halla sus funciones inversas.

$f\colon [2; +\infty] \to [3; +\infty]\, f(x) = 3 + \sqrt{x-2}$.

$g\colon \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{1\}\ g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

**12** Sea $f$ la función definida sobre $[0; 3]$ por:

$$\begin{cases} f(x) = 3 - x & \text{si } 1 < x < 2 \\ f(x) = x & x \notin ]1; 2[ \end{cases}$$

Utiliza una representación gráfica de $f$ para mostrar que $f$ es una biyección de $[0; 3]$ sobre si mismo.

**13** Sea $f$ la función definida por $f(x) = \dfrac{5x-3}{2x+5}$.

Resolviendo la ecuación $f(x) = k$, muestra que existen reales $x_0$ y $y_0$ tales que $f$ determina una biyección entre $\mathbb{R} - \{x_0\}$ y $\mathbb{R} - \{y_0\}$.

**14** Sea $f$ la función definida por $f(x) = 4x^2+4x-5$.
Muestra que, para todo $x > 0, f(x) \geq -6$.
Calcula $f(-0{,}5)$ y deduce que $f$ admite un *mínimo* sobre $\mathbb{R}$.

**15** Sea $f$ la función de$]0; +\infty[$en $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \frac{6}{x} - \frac{9}{x^2}.$$

**a)** Muestra que, para todo $x > 0, f(x) \leq 1$.

**b)** Resuelve la ecuación $f(x) = 1$ y deduce el máximo que $f$ tiene en $]0; +\infty[$.

**16** Sea $f$ la función definida por:

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}} - 2$$

**a)** Muestra que $f$ no esta acotada superiormente en $]0; +\infty[$ (utilizar la desigualdad $f(x) \leq \sqrt{x} - 2$ ).

**b)** Proponer una cota inferior evidente de $f$ en el intervalo $]0; +\infty[$.

**c)** Probar que 4 es el mínimo de $f$ en $]0; +\infty[$.

En los ejercicios del 17 y 18 estudia la paridad de cada una de las funciones definidas por las fórmulas correspondientes.

**17** **a)** $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ **b)** $f(x) = x^3$

**c)** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

**18** **b)** $g(x) = x\sqrt{|x|}$ **b)** $g(x) = \sqrt{x-1}$

**b)** $g(x) = \dfrac{|x|-1}{1+x^2}$

**19** ¿Es par la función $f$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x+1} & \text{para } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{x^2-x-2}{-x+1} & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

**20** Sea $f$ una función impar, definida por:

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ para } x \geq 0.$$

Calcula:
$f(-2), f(-3), f(-a^2)$ para $a \in \mathbb{R}$ y $f(x)$ para $x < 0$.

**21** Demostrar que las funciones siguientes son biyectivas. Determinar en cada caso las funciones inversas respectivas.

| | |
|---|---|
| $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <br> $f(x) = x - 7$ | $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <br> $f(x) = 2x - 3$ |
| $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <br> $f(x) = 2x + \lvert x\rvert$ | $f\colon \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ <br> $f(x) = \dfrac{2x-6}{x-1}$ |
| $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ <br> $f(x) = \dfrac{4}{x}$ | $f\colon \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ <br> $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$ |

**22** Si $f$ es una función periódica, de período $p$ y $k$ es un número real fijo las funciones $kf$ y $g$ definida por $g(x) = f(x) + k$ ¿son periódicas?