FICHA	6	6to I MAT"1"	FUNCIONES. EXÁMENES PROBLEMAS.	Liceo Nº3 N CURSO 2012 Prof. S Weinberger

1) **Sea f: f (x) =** $\begin{cases} Lx & \text{si } x \geq 1 \\ 1-x & \text{si } 0<x<1 \\ x^2+2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

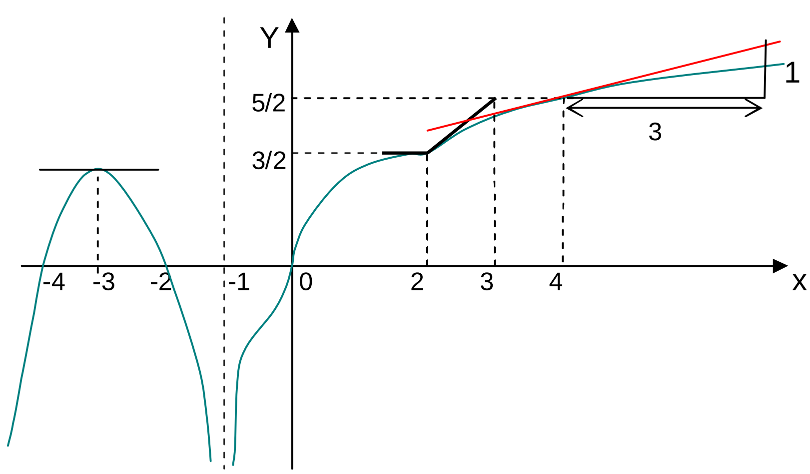
   a) Estudiar continuidad y derivabilidad de f en 0 y en 1.
   b) Calcular f '(-1) y construir la recta tangente a la gráfica de f en (-1,f(-1)).
   c) Graficar f.

2) **Sea f : f (x) =** $\begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ L(x+1)+2 & \text{si } x>0 \end{cases}$

   a) Estudiar continuidad de f en x=0
   b) Determinar f '(x) y calcular : $\lim_{x \to 0^{\pm}} f'(x)$ ¿es f derivable en 0?. Fundamentar.
   c) Verdadero o falso? :

   Si g cumple : $\lim_{x \to a^{\pm}} g'(x) = \alpha \in R$ $\Rightarrow$ g derivable en a.
   Si es verdadero, justificar, si es falsa corregir la hipótesis para hacerla verdadera.

3) Se considera una función f cuyo gráfico es :



   a) Determinar sig(f(x) y sig(f '(x))
   b) Determinar f '(4), $\lim_{x \to 2^-} f'(x)$ y $\lim_{x \to 2^+} f'(x)$
   ¿es f derivable en 2? ¿ y en 0 ?.Justificar.

4) Graficar una función f que cumpla :

sig(f(x))+ + + + + + 0 - - - - - 0 - - - - - ∄ + + + + $\text{lím}_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$

-5 -3 0 x

sig(f '(x)) - - - - - - - - - - - 0+ +∄ - - - - ∄- - -0+ + +

-4 -3 0 1 x

$\text{lím}_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ $\text{lím}_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$

$\text{lím}_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ $\text{lím}_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = 4$

f (-4)= -2 $\text{lím}_{x\to-3^-} f'(x) = 3$ $\text{lím}_{x\to-3^+} f'(x) = 0$ **f(1)=2**

5) EAyRG, incluyendo asíntotas y derivadas de:

a) f : f (x) = $= \dfrac{x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1}$ sin f '' b) f : f (x)= $= \dfrac{\sqrt{x+2}}{3x - x^2}$ sin f ''

c) f : f (x)= $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}\, e^{\frac{1}{x-1}}$ d) f : f (x)= $L\left(\dfrac{x^2 - 4}{2x - 1}\right)$ sin f ''

e) f : f(x)= $|x+1|.e^x$ f) f : f (x)= $\dfrac{x-3}{x-1} + L|x^2 + 2x - 3|$

g) f : f(x)=$\sqrt[3]{(x-1)^2.x}$ sinf ''

EJERCICIOS DE EXAMEN

6) EAyRG de : f : f (x) = $\dfrac{e^{\frac{x+4}{x+3}}}{x+3}$, sin f ''. Se estudiará semitangente en -3^-, y se determinará un posible signo de f '' (x) coherente con el estudio hecho.

7) a) Sea f : f (x) = $(x+1).L\left|\dfrac{x+1}{e}\right|$

i) Demostrar que f ' (x) = L| x+1 |
ii) Calcular, aplicando la definición de derivada, f ''(a)
iii) EA y RG de f

b) Verdadero o Falso?. Fundamentar.

i) si $\text{lím}_{x\to -1^-} f(x) = \text{lím}_{x\to -1^+} f(x) \Rightarrow$ f es continua en -1

ii) si g:g (x) =$\sqrt[3]{x-2}$ $\Rightarrow$ g es continua y derivable en 2

8) Sean $f : f(x) = L|x^2-1| - \dfrac{1}{x-1}$

a) EAyRG de f.
Hallar ecuación y construir , la recta tangente a la gráfica de f en el punto (0,f (0)).

b) Se considera la función $g : g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ |x-2| -1 & \text{si } 0<x<4 \\ L(x-4) & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

i) Estudiar continuidad y derivabilidad de f en 0, 2 y 4.
ii) Graficar f.

c) ¿Verdadero o Falso?. (Si V: demostrar, si F:contraejemplo)

i) si h no es derivable en 2 $\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} h(x)$

ii) $\left.\begin{array}{l} \text{si } \exists \text{ y es finito el } \lim_{x\to a} \dfrac{u(x)-u(a)}{x-a} \\ \text{u tiene un mínimo relativo en a} \end{array}\right\} \Rightarrow u'(a)=0$

9) a) Sea u:u(x)= L(x+1) -1

i) Graficar u y deducir su signo, calculando exactamente su raíz.
ii) Demostrar ,aplicando la def. de derivada que si a > - 1, entonces

$$u'(a) = \frac{1}{a+1}$$

b) Sea $f : f(x) = (x+1).L(x+1) - 2x$

i) Demostrar que f tiene una raíz en el intervalo (3,4).

ii) EAyRG de f. Se calculará e interpretará gráficamente el $\lim_{x\to -1^+} f'(x)$

iii) Hallar la ecuación de la recta t, tangente a la gráfica de f en el punto (0,0). Graficar t, junto con f.

c) Demostrar que :

$$\text{si } \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \alpha \in R^- \Rightarrow \exists E^*(a,\delta) / \forall x \in E^*_-(a,\delta) : g(x) > g(a)$$

10) a) Sea $f: f(x) = \begin{cases} (3-x).e^{x-3} & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

i) Hacer el **estudio analítico de f, sólo para x< 3.**

ii) Graficar f en todo su dominio.

iii) Estudiar continuidad y derivabilidad de f en 3.

b) Verdadero o falso? Fundamentar.

i) si $\text{lím}_{x\to 3} f(x) = f(3) \Rightarrow \quad \text{lím}_{x\to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x-3} = \alpha \in R$

ii) si $\text{lím}_{x\to a} \dfrac{g(x) - g(3)}{x-3} = \alpha \in R \Rightarrow g.\text{cont.en.}3$

11) a) Sea $f: f(x) = L|x+3| + 2x + 4$

i) Demostrar, aplicando el teorema de Bolzano, que f tiene una raíz en (-2,5 ; -1)

ii) Verificar si en el intervalo anterior hay una raíz entera.

iii) EAyRG de f.

b) Verdadero o Falso?. (En caso V : demostrar, en caso F: contraej)

i) si $\text{lím}_{x\to 1} \dfrac{h(x) - h(1)}{x-1} = 0 \quad \Rightarrow$ h tiene máx. o mín relativo en 1.

ii).si $\text{lím}_{x\to a} \dfrac{v(x) - v(a)}{x-a} = -2 \Rightarrow \quad v\downarrow$ en a .

12) a) i) Siendo $u: u(x) = (Lx) + 1$, deducir que la tangente a la gráfica de u en el punto (1,1) es la recta **y=x.** Graficar.

ii).Discutir según $m \in \Re$, $m \geq 0$ el signo de la función :
$g: g(x) = (Lx) + 1 - mx$

b) Sea $f: f(x) = x(2Lx - mx)$ con $m \in \Re$, $m \geq 0$

i) Estudio Analítico de f, discutiendo según $m \in \Re$, $m \geq 0$.
ii) Efectuar bosquejos gráficos de f en cada caso discutido en i)

c) Verdadero o Falso?. (En caso V : demostrar, en caso F: contraejemplo).

i) si $\lim_{x\to 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = 0 \Rightarrow$ h tiene máx. o mín relativo en 1.

ii).si $\lim_{x\to a} \frac{v(x)-v(a)}{x-a} = -2 \Rightarrow v \downarrow$ en a .

iii).si w es derivable en [a,b] $\Rightarrow$ $\exists c \in (a,b)/\ w'(c)=0$

13) **a)** Se consideran las funciones : **u:u(x)=2x+4 y v:v(x)=e^x**

Calcular, aplicando la definición: **u '(a) y v '(a).**

b) i) EA y RG de $g: g(x) = (2x+4).e^x$

ii) Estudiar continuidad , derivabilidad en –2 y en 1 y graficar :

$$h: h(x) = \begin{cases} (2x+4).e^x & \text{si } \mathbf{x < -2} \\ x+2 & \text{si } -2 \le x \le 1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

14) **a)** Sea $g: g(x) = e^{u(x)}$ con u derivable en a.

Demostrar, aplicando la definición de derivada : $g'(a) = e^{u(a)}.u'(a)$

b) Sea $f: f(x) = \frac{x-\lambda}{x} e^{\frac{1}{x}} - 1 \quad \text{con } \lambda > 0$

i) **EA de f, (sin f ''),** discutiendo según $\lambda > 0$

ii) Efectuar bosquejos gráficos de f, discutiendo según $\lambda > 0$, escribiendo en cada caso un posible signo de f ''(x) coherente con el estudio hecho. Se sabe que : $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0 \ \forall \lambda$

iii) Demostrar que, para $\lambda = \frac{1}{2}$, f tiene una raíz en $(\frac{3}{5}, 1)$.
Se justificará que dicha raíz es única en dicho intervalo.

c) Sea

$$h: h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < 0 \\ x^2+1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

(f es la función de b))

Investigar si h es derivable en 0. Justificar respuesta.

15) a) Sea $f : f(x) = \frac{6x}{x+3} - 6L|x+3|$

i) EAyRG de f

ii) Hallar la ecuación de la recta t, tangente al G(f) en el punto (3,f(3)). Graficar dicha recta junto con f.

b) Verdadero o falso?. (Si V : demostrar, si F:contraejemplo)

i) **Si g $\downarrow$ en 2 y $\exists$g '(2) $\Rightarrow$** $\text{lím}_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \alpha < 0$

ii) **Si h : h(x)=** $x^3 - 2x^2 + x + 2 \Rightarrow$ **$\exists$p$\in$(0,1) / f '(p)=0**
(si se halla h '(x) debe aplicarse def. de derivada)

16) a) Sea $g : g(x) = Lu(x)$, siendo $u / u(a) > 0$, u derivable en a

Demostrar que : $g'(a) = \frac{u'(a)}{u(a)}$

b) Sea $f : f(x) = L|x^2 - 1| + \frac{4}{3}x$

i) EAyRG de f

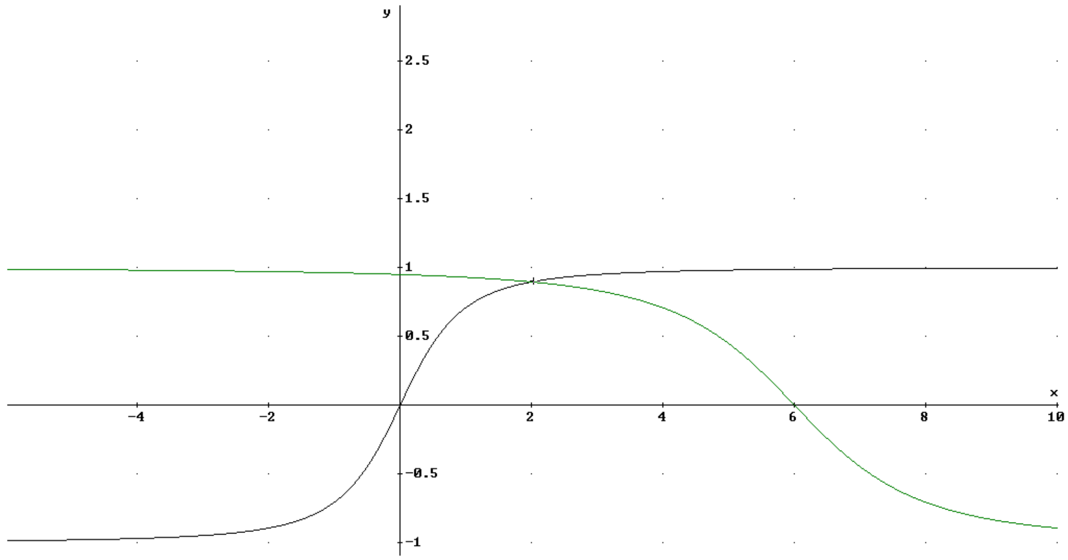
ii) Sea **g:g(x)=** $\begin{cases} f(x) & \text{si } x < 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

¿Es posible aplicar el teorema de Rolle a g en [0,2]?

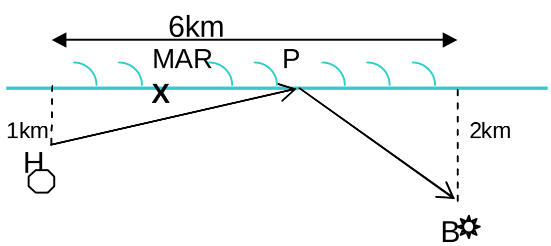
¿ y en el [1,3]?. Fundamentar respuestas.

17)a) Se consideran las funciones **: u:u(x) =** $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **, v:v(x)=** $\dfrac{6-x}{\sqrt{x^2-12x+40}}$

cuyos bosquejos gráficos son:



Identificar el bosquejo correspondiente a cada función. Justificar elección.



b) Se ha producido un incendio en el bosque B. Debe transportarse agua en helicópteros que parten de H, cargan agua en un punto P y lo llevan hasta el bosque B.

i) Hallar una expresión de d(x), distancia recorrida por cada helicóptero desde H hasta B. $(\overline{HP}+\overline{PB})$

ii) Determinar la posición P (hallando x) de modo que la distancia recorrida sea mínima. Calcular dicha distancia.

18) a) Sea $f: f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x+2}e^{\frac{x+2}{x}}+1$

i) EAyRG de f.

ii) ¿puede aplicarse el teorema de Lagrange a f en [-3,0]?
¿ y en [-1, $-\frac{1}{2}$] ? Fundamentar respuesta.
Si en alguno de los dos casos respondió afirmativamente, **completar** : $\xrightarrow{\text{por teo.Lagrange}} \exists c\in(..,..)/f'(c)=......$

b) Sea f una función que cumple las siguientes condiciones:

$d(f) = R - \{1\}$ f es continua en su dominio.

sig f(x) - - - - - 0 + + + 0 - - - - - ∄ + + + 0 + + +

$-\frac{5}{2}$ **0 1 2 x**

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty , \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -1 , \lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 , \ \lim_{x\to \pm\infty} (f(x) - x) = 0$$

sig f ' (x) + + + + + + 0 - - - - - - - - ∄ - - - - ∄ + + + +

-1 1 2 x

f(-1)=1 $\lim_{x\to 2} f'(x) = \infty , \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0$

sig f ''(x) + + 0 - - - - - - - - - - 0 + + + + + ∄ + + 0 - - ∄ - - - -

- 3 0 1 3/2 2 x

f(-3)=-1 f(3/2)=3/2

<u>Graficar una función f que cumpla con todos los datos anteriores</u>

PROBLEMAS

1) Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene longitud “a”, gira alrededor de uno de sus catetos generando un cono. Dimensionar el triángulo para que el volumen del cono sea el máximo posible.($V_{cono}=\frac{\pi}{3} r^2 h$)

2) Se quiere construir una caja abierta con un rectángulo de cartón, quitando cuadrados iguales en cada esquina, doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse si el rectángulo tiene como lados 12x18cm.

3) Se quiere fabricar una lata cilíndrica de 0.64 litros de capacidad sin tapa superior. Dimensionarla de modo que su área sea mínima.

4) La resistencia de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de la base por el cuadrado de la altura de dicho rectángulo. (la constante de proporcionalidad k depende del material). De un cilindro de diámetro “d” es necesario cortar una viga de máxima resistencia.¿qué dimensiones se debe dar a la viga?¿la razón entre las dimensiones de la sección dependen del material?

5) La intensidad (en amperes) de la corriente eléctrica en un circuito está dada por $I = 100/R$, R es resistencia (en ohms). Encontrar la velocidad de variación de I respecto a R, cuando la resistencia es de 20Ω.

6)Sea $f: f(t) = P(1 - e^{-kt})$ es una función que han encontrado los sociólogos para describir la difusión de una información a través de los medios masivos de comunicación. f (t) es el número de personas que han escuchado cierta información al transcurrir t horas. P es el número de integrantes de la población estudiada, k es una constante que depende de las condiciones en que se difunde la noticia.(f ‘(t) describe la razón de crecimiento del número de personas informadas en un instante t)

a. Calcular el número de personas informadas en el momento inicial.
b. ¿qué ocurre con la información al transcurrir mucho tiempo?
c. Determinar k, sabiendo que la noticia de la renuncia de un ministro es informada en los medios durante 4hs, al cabo de las cuales se difundió al 50% de la población de Montevideo.
d. Para el k hallado y con la población de Montevideo (1,5 millones aprox), EAyRG de F para los valores de t que correspondan.
e. Determinar la razón de crecimiento a las 4 horas en que se difundió una información e interpretar.

7)Un camión debe recorrer 100km viajando a una velocidad constante de v km/h (siendo 80 km/h la velocidad máxima permitida). El combustible cuesta 5$ el litro, el consumo es de (1/40).v^2 litros por hora. El conductor cobra 100$ por hora. Determinar la velocidad más económica y el precio del viaje. Investigar como varía la respuesta según la cantidad de km recorridos.

8) Se prepara una pintura agregando un aditivo en un porcentaje **“x”** no superior al 10%. El costo por m^2 (incluyendo pintura y aditivo) para cubrir una superficie, viene dado por f (x) de la parte a).

i) ¿cuál es el dominio de f en este caso?
ii) ¿entre que valores aproximados puede variar el costo señalado según el % de aditivo agregado?(recorrido de f)
iii) ¿qué % del aditivo genera el menor costo?¿cuál es dicho costo?.