Liceo N° 68 - Escrito de Matemática I - Prof. Saúl Tenenbaum 01/10/14

Nombre (en imprenta):...

Resolver y verificar las siguientes primitivas, también llamadas integrales indefinidas.

1) $\int \frac{29}{x^2 - 10x + 27}.dx$

2) $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} dx$

3) $\int (\cos x)^3 .dx = \int \cos^3 x.dx$

4) $\int e^{-x}.(sen\ x).dx$

5) $\int \frac{Lx}{x}.dx$

6) Dada la igualdad $\int f.f'dx = x.\cos x$ deducir una expresión explícita para f(x).

HOJA 1

1) $$\int \frac{29}{x^2-10x+27}\,dx = \int \frac{29}{(x-5)^2+2}\,dx = \frac{29}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-5}{\sqrt{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

2) $$\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\,dx = \int \frac{x^2-x+x+1}{x^2-x}\,dx = \int \left(1 + \frac{x+1}{x^2-x}\right) dx$$

$$\frac{x+1}{x^2-x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} \iff x+1 = a(x-1) + bx$$

$x=0 \rightarrow 1 = -a$ $a=-1$

$x=1 \rightarrow 2 = b$ $b=2$

EN RESUMEN: $$\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\,dx = \int 1 + \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} = x - L|x| + 2L|x-1| + C$$

3) $$\int \cos^3 x\,dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\cdot \cos x\,dx = \int (1-u^2)\,du = u - \frac{u^3}{3} = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

$u = \operatorname{sen} x$

$du = u' = \cos x \cdot dx$

DESHACER EL CAMBIO DE VARIABLE

4) $$\int e^{-x} \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx = -\operatorname{sen} x \cdot e^{-x} + \int \cos x \cdot e^{-x}$$

APLICAMOS PARTES 2 VECES

$f = \operatorname{sen} x$ $f' = \cos x$

$g' = e^{-x}$ $g = -e^{-x}$

$$\int \cos x \cdot e^{-x}\,dx = -\cos x \cdot e^{-x} - \int \operatorname{sen} x \cdot e^{-x}$$

$f = \cos x$ $f' = -\operatorname{sen} x$

$g' = e^{-x}$ $g = -e^{-x}$

HOJA 2

4) EN RESUMEN:

$$\int e^{-x}\cdot \operatorname{sen}x\,dx = -\operatorname{sen}x\cdot e^{-x} - \cos x\cdot e^{-x} - \int \operatorname{sen}x\cdot e^{-x} \Rightarrow$$

$$2\int e^{-x}\cdot \operatorname{sen}x\,dx = -\operatorname{sen}x\cdot e^{-x} - \cos x\cdot e^{-x}$$

$$\int e^{-x}\cdot \operatorname{sen}x\,dx = \frac{-e^{-x}(\operatorname{sen}x+\cos x)}{2} + C = A(x)$$

VERIFICACIÓN: $A'(x) = \dfrac{e^{-x}(\operatorname{sen}x+\cancel{\cos x}) - e^{-x}(\cancel{\cos x}-\operatorname{sen}x)}{2}$ ✓

5) $$\int \frac{Lx}{x}\,dx = \int Lx\cdot\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} \underset{\text{DCV}}{=} \frac{(Lx)^2}{2} + C$$

$u = Lx$

$du = u' = \frac{1}{x}dx$

6) PARTES: $\int f\cdot g' = fg - \int f'g$

$$\int f\cdot f' = f\cdot f - \int f'\cdot f \Rightarrow 2\int f\cdot f' = f^2$$

$$\boxed{\int f\cdot f' = \frac{f^2}{2}}$$ NUEVA FORMULITA !!!

$$\int f\cdot f' = x\cdot\cos x = \frac{f^2}{2}$$

$$\boxed{f(x) = \pm\sqrt{2x\cdot\cos x}}$$

USAMOS + "POR EJEMPLO"

VERIF: $f'(x) = \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{2x\cdot\cos x}}(\cancel{2}\cdot\cos x - \cancel{2}x\cdot\operatorname{sen}x)$

$$\int f\cdot f' = \int \cancel{\sqrt{2x\cdot\cos x}}\cdot\frac{(\cos x - x\operatorname{sen}x)}{\cancel{\sqrt{2x\cdot\cos x}}}dx = \int(\cos x - x\cdot\operatorname{sen}x) = x\cdot\cos x$$ ✓