Liceo N° 68 - Escrito de Matemática I - Prof. Saúl Tenenbaum 29/05/14

Nombre (en imprenta):..

1) Calcular i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{L|x| + e^{x}}{e^{x+2} + 4x^{3}}$ ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{L|x| + e^{x}}{e^{x+2} + 4x^{3}}$

2) i) Defina continuidad de una función en un intervalo [a,b].

ii) Calcular c y d para que f sea continua en $\mathbb{R}$.

$$f : f(x) = \begin{cases} x^{2} + cx + 5 & si \quad x < 2 \\ d & si \quad x = 2 \\ \dfrac{e^{2x+1} - e^{5}}{L(2x-3)} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

3) Enunciar y demostrar el Teorema de Darboux.

4) Sea f una $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua.

Demuestra que existe un número $m \in [0,1]$ tal que $f(m) = m$

5) Dada la función $g : g(x) = x^{3} + Lx - 4$

i) Demuestra que tiene al menos una raíz.

ii) Determinarla con error menor que 0,1

6) i) Sea la función $h : h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+5} - 3} & si \quad x \neq 4 \\ \tilde{n} & si \quad x = 4 \end{cases}$

Discutir, en función de ñ, la continuidad de h.

Respuestas:

1) i) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{L|x| + e^x}{e^{x+2} + 4x^3} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^{x+2}} = \dfrac{1}{e^2} = e^{-2}$ aplicamos órdenes.

ii) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{L|x| + e^x}{e^{x+2} + 4x^3} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{L|x|}{4x^3} = 0^-$ por órdenes.

porque la función exponencial tiende a 0 cuando x tiende a menos infinito.

2) ii)

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{e^{2x+1} - e^5}{L(2x-3)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{e^5\left(e^{2x+1-5} - 1\right)}{2x-3-1} = \lim_{x \to 2^+} \frac{e^5\left(e^{2x-4} - 1\right)}{2x-4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{e^5\,(2x-4)}{2x-4} = e^5$$

Se deduce que $d = e^5$ y además $\lim_{x \to 2^-} x^2 + cx + 5 = 9 + 2c$

Entonces $9 + 2c = e^5 \Rightarrow c = \dfrac{e^5 - 9}{2}$

4) Utilizar la función auxiliar g(x) = f(x) - x

5) $g : g(x) = x^3 + Lx - 4$

g(1)= -3 g(2)=8+L2-4=4+L2 es un número positivo, y g es continua por ser "suma" de funciones continuas en el intervalo [1,2]. Entonces, por el Teorema de Bolzano existe por lo menos un número c en el intervalo (1,2) tal que g(c)=0.

Para aproximarla, utilizamos el método de división de intervalos y llegamos a un valor aproximado de 1,54.

6) Aplicamos conjugada.

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+5} - 3} = \lim_{x \to 4} \frac{\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}}{\dfrac{x+5-9}{\sqrt{x+5}+3}} = \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{x-4}}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x+5}+3}{\cancel{x-4}} = \frac{\sqrt{4+5}+3}{\sqrt{4}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Entonces si ñ = 3/2 la función es continua en x = 4. Para otros valores de ñ, no lo es.