$\sqrt{2}$ No es Racional

Investiguemos si puede existir un número racional x, que cumpla $x^2=2$.

Recordemos que si x es racional entonces x se puede escribir

$x=\frac{p}{q}$; $p\in\mathbb{Z}$ y $q\in\mathbb{N}^*$ con mcd(p,q)=1 (p y q no tienen divisores en común distintos de 1)

entonces, si $x^2=2$: $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2\Rightarrow\frac{p^2}{q^2}=2\Rightarrow p^2=2.q^2 (*)$ de donde deducimos que p^2 es múltiplo de 2 y por ende, p es múltiplo de 2.

Sea entonces p = 2k, con $k\in\mathbb{Z}$ (ya que p es múltiplo de 2) sustituyendo en (*) obtenemos que:

$(2k)^2=2q^2$ que, operando se transforma en:

$2k^2=q^2$ y por lo tanto q^2 también es múltiplo de 2, por lo cual q es múltiplo de 2.

Esto último junto con que p es múltiplo de 2 contradice nuestro punto de partida: mcd(p,q) = 1.

Por lo tanto, no puede ser $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$

Existencia de $\sqrt{2}$

Sea $A=\{x\in\mathbb{R}/x^2<2\}$

Probemos que este conjunto tiene extremo superior, y que el extremo superior al cuadrado es 2.
Esto nos muestra que “el candidato ideal” para la definición de $\sqrt{2}$ es exactamente el extremo superior del conjunto A.

A está incluido en $\mathbb{R}$, **A no es vacío** ($1\in A$)y **A está acotado superiormente** (se puede verificar que 5 por ejemplo es cota superior de A).
Por lo tanto (por axioma de Completitud) **A tiene extremo superior:** c = $\overline{ext}\, A$

Probemos ahora que c^2 no es menor que 2 ni puede ser c^2 mayor que 2, por lo tanto: $c^2=2$

Suponemos que $c^2 < 2$:

Sea entonces:

$c+\frac{1}{n}$ con $n\in\mathbb{N}$. Se probará que $\left(c+\frac{1}{n}\right)^2<2$:

$$\left(c+\frac{1}{n}\right)^2=c^2+\frac{2c}{n}+\frac{1}{n^2}\leq c^2+\frac{2c}{n}+\frac{1}{n} \qquad \left(\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n}\right)$$

Obs:

$$c^2+\frac{2c+1}{n}<2 \Leftrightarrow \frac{2c+1}{n}<2-c^2 \Leftrightarrow \frac{2c+1}{2-c^2}<n \qquad \text{(tener presente que } 2-c^2>0 \text{)}$$

Sabemos por Arquímedes que **existe un natural n** mayor que $\frac{2c+1}{2-c^2}$ por lo tanto para ese natural se cumple:

$$(c+\frac{1}{n})^2 < c^2 + \frac{2c+1}{n} < 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(c+\frac{1}{n})^2 < 2}$$

<u>Conclusión 1:</u>

$$\left.\begin{array}{c} \exists n \in \mathbb{N} \; tal\ que: \\ c < c + \frac{1}{n} \\ (c+\frac{1}{n})^2 < 2 \Rightarrow \; (c+\frac{1}{n}) \in A \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{Encontramos un elemento de A mayor que el extremo superior.}$$

<u>Como esto no puede pasar (pues el extremo superior es cota superior, y por lo tanto debe ser mayor o igual que todos los elementos de A) deducimos que nuestra suposición ($c^2 < 2$) no es correcta.</u>

<u>Suponemos ahora que $c^2 > 2$:</u>

Sea entonces:

$c - \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$. Se probará que $(c - \frac{1}{n})^2 > 2$:

$$(c-\frac{1}{n})^2 = c^2 - \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} > c^2 - \frac{2c}{n}$$

<u>Obs</u>:

$$c^2 - \frac{2c}{n} > 2 \;\Leftrightarrow\; c^2 - 2 > \frac{2c}{n} \;\Leftrightarrow n > \frac{2c}{c^2-2}$$ (tener presente que $c^2 - 2 > 0$)

Sabemos por Arquímedes que **existe un natural n** mayor que $\frac{2c}{c^2-2}$ por lo tanto para ese natural se cumple:

$$(c-\frac{1}{n})^2 > c^2 - \frac{2c}{n} > 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(c-\frac{1}{n})^2 > 2}$$

<u>Conclusión 2:</u>

$$\left.\begin{array}{c} \exists n \in \mathbb{N} \; tal\ que: \\ (c-\frac{1}{n})^2 > 2 \\ 2 > x^2 \, \forall \, x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow \left(c - \frac{1}{n}\right)^2 > x^2 \;\Rightarrow\; c - \frac{1}{n} > x \quad \forall \, x \in A \;\Rightarrow\; \left(c - \frac{1}{n}\right) \text{ es cota superior de A.}$$

Lo cual no puede ser pues es menor que el extremo superior de A.

Así, c^2 no puede ser mayor que 2. Junto con la conclusión 1 llegamos a que $c^2 = 2$

Entonces podemos definir: $\boxed{\sqrt{2} = \overline{ext}\{x \in \mathbb{R} / x^2 < 2\}}$