NÚMERO REAL

El conjunto de los números racionales se nos hace insuficiente a la hora de representar con exactitud magnitudes tan "reales" como la diagonal de un cuadrado cuyo lado mida 1, por ejemplo, o la de una circunferencia cuyo diámetro mida 2. Ningún número racional elevado al cuadrado nos da 2, que es lo que exige el teorema de Pitágoras para el cuadrado del primer ejemplo, ni hay tampoco un número racional que exprese π, es decir, la tan conocida relación entre una circunferencia y su diámetro.

Por estas y otras razones se nos hace necesario ampliar el conjunto de los números con que veníamos trabajando hasta ahora, y llega el momento de introducir los llamados **números reales**. Veremos en este capítulo que el conjunto de los números reales (R) se estructura como un cuerpo conmutativo (a partir de las propiedades que verifican en él la suma y el producto), ordenado (es posible determinar en él un criterio de orden, con determinadas consecuencias) y completo (a diferencia del conjunto de los racionales, que es denso pero no completo). Presentaremos estas tres características mediante un conjunto de axiomas que pasamos a enunciar de inmediato.

1. Axiomas de cuerpo y propiedades operatorias

Definición 1

El conjunto R, de los números reales, es un conjunto numérico en el que definimos dos operaciones: suma [+: $(a,b) \rightarrow a+b$] y producto [· : $(a,b) \rightarrow a \cdot b$] que verifican los siguientes axiomas:

Axioma 1 La suma es conmutativa: $a + b = b + a$
Axioma 2 La suma es asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$
Axioma 3 Existe neutro (0) para la suma: $0 + a = a$
Axioma 4 Todo real tiene un opuesto: $\forall a \in R, \exists (-a) \in R / a + (-a) = 0$
Axioma 5 El producto es conmutativo $a \cdot b = b \cdot a$
Axioma 6 El producto es asociativo $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Axioma 7 Existe neutro (1) para el producto $1 \cdot a = a$
Axioma 8 Todo real diferente de 0 tiene un inverso $\forall a \in R, a \neq 0, \exists a^{-1} \in R / a \cdot a^{-1} = 1$
Axioma 9 El producto es distributivo respecto de la suma:
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Como consecuencia de la definición precedente, podemos afirmar que la estructura

$$\{ R , + , \cdot \}$$

es un **cuerpo conmutativo.** A continuación presentaremos, a vía de ejemplo, algunos teoremas y definiciones que permitirán desarrollar las posibilidades operatorias dentro del cuerpo de los reales, sin preteder con ello abarcar toda la teoría referida a este conjunto numérico.

Teorema 1 (Propiedad cancelativa de la suma)

Hipótesis: $c + a = c + b$
Tesis: $a = b$

Demostración:

El **axioma 4** nos permite establecer que dado el real c, existe su opuesto (-c), que podemos sumar a ambos miembros de la hipótesis, sin que se altere la igualdad:

$$(-c) + c + a = (-c) + c + b$$

Ahora el **axioma 2** nos permite asociar términos:

$$[(-c) + c] + a = [(-c) + c] + b$$

Según el **axioma 4**, $(-c) + c = 0$, por lo que la igualdad anterior nos queda así:

$$0 + a = 0 + b$$

Y finalmente, aplicando el **axioma 3**, llegamos a la tesis:

$$\boxed{a = b}$$

<u>Teorema 2</u> (Unicidad del neutro aditivo)

Hipótesis: $\exists\ 0' \in R \ /\ a + 0' = a$
Tesis: $0' = 0$

Demostración:

La hipótesis establece $a + 0' = a$, y el **axioma 3** nos dice que $a + 0 = a$. En consecuencia, podemos afirmar lo siguiente:

$$a + 0' = a + 0$$

Si ahora aplicamos la <u>propiedad cancelativa</u> demostrada en el teorema 1, llegamos a nuestra tesis:

$$\boxed{0' = 0}$$

Es decir, el neutro de la suma es único.

<u>Definición 2</u>

Diferencia. Dado un par de reales (a , b) llamaremos **diferencia entre a y b** a un número real que se representa $d = a - b$, y que verifica $a = d + b$

<u>Teorema 3</u> (Existencia de la diferencia de reales)

Hipotesis: $a \in R$
$b \in R$
Tesis: $\exists\ d \in R \ /\ d + b = a$

Demostración:
Como por hipótesis b es un número real, el **axioma 4** nos permite afirmar que existe su opuesto (-b). Llamaremos d al número real [a + (-b)] y veremos que verifica la condición establecida en nuestra tesis. Dejamos a cargo del estudiante la justificación de cada uno de los pasos que nos conducirán a dicha tesis:

$$d = a + (-b)$$
$$d + b = [a + (-b)] + b$$
$$d + b = a + [(-b) + b]$$
$$d + b = a + 0$$

$$\boxed{d + b = a}$$

Teorema 4 (Unicidad de la diferencia)

Hipótesis: $a - b = d$
$a - b = d'$

Tesis: $d = d'$

Demostración:
De acuerdo a la definición de diferencia, y según el primer punto de la hipótesis, se cumple :

$$a = b + d$$

Según el segundo punto de la hipótesis, se cumple también:

$$a = b + d'$$

En consecuencia:

$$b + d = b + d'$$

Y, por propiedad cancelativa:

$$\boxed{d = d'}$$

Teorema 5 (El 0 es absorbente para la multiplicación)

Hipótesis: $a \in R$

Tesis: $a \cdot 0 = 0$

Demostración:
Volvemos a dejar a cargo del estudiante la justificación de cada uno de los pasos siguientes:

$$0 + 0 = 0$$
$$a.(0 + 0) = a.0$$
$$a.(0 + 0) = a.0 + 0$$
$$a.0 + a.0 = a.0 + 0$$

$$\boxed{a.0 = 0}$$

<u>Teorema 6</u> (Propiedad cancelativa del producto)

Hipótesis: $a.b = a.c$
$a \neq 0$

Tesis: $b = c$

Demostración:
Volvemos a dejar a cargo del estudiante la obligatoria justificación de cada uno de los pasos del desarrollo siguiente:

$$a.b = a.c$$
$$a^{-1}.(a.b) = a^{-1}.(a.c)$$
$$(a^{-1}.a).b = (a^{-1}.a).c$$
$$1.b = 1.c$$

$$\boxed{b = c}$$

<u>Teorema 7</u> (Unicidad del neutrodel producto)

Hipótesis: $\exists\ 1' \in R \,/\, a.1' = a$

Tesis: $1' = 1$

Demostración:
La demostración queda íntegra a cargo del estudiante, a quien sugerimos se inspire en el teorema 2.

<u>Definición 3</u>

Cociente. Dado un par de reales (a , b) con $b \neq 0$, llamaremos **cociente de a y b** a un número real que se representa $q = a / b$, y que verifica $a = q . b$

Dejamos como ejercicio para el estudiante la demostración de existencia y unicidad del cociente, sugiriéndole que se base en los teorémas análogos referidos a la diferencia.

<u>Teorema 8</u>

Si un producto de dos factores es igual a cero, por lo menos uno de ellos es cero.

Hipótesis: $a . b = 0$

Tesis: $a = 0$ ó $b = 0$

Demostración:
Siendo a un número real, verifica una y sólo una de las siguientes dos proposiciones:

$$a = 0$$
$$a \neq 0$$

La verificación de la primera de ellas, implica la inmediata verificación de la tesis. Pasemos entonces al caso $a \neq 0$. Como por hipótesis es $a . b = 0$ y además $a.0 = 0$ por el **teorema 5**, podemos escribir

$$a.b = a.0$$

Siendo $a \neq 0$ podemos aplicar la propiedad cancelativa, con lo que llegamos a la segunda alternativa de la tesis:

$$\boxed{b = 0}$$

Corolario del teorema 8

$$\left.\begin{array}{l} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a.b \neq 0$$

2. Axiomas de orden y desigualdades

Definición 4

En el conjunto de los números reales existe un subconjunto R^+ (**reales positivos**) que verifica los siguientes dos axiomas, llamados **axiomas de orden**:

Axioma 10 Dado un real a, una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

$$a = 0$$
$$a \in R^+$$
$$(-a) \in R^+$$

Axioma 11 Si $a \in R^+$ y $b \in R^+$, entonces $(a + b) \in R^+$ y $(a . b) \in R^+$

Si se cumplen los axiomas 1 a 11, podemos afirmar que la estructura con la que estamos tratando es un **cuerpo conmutativo ordenado.**

Observación 1

El opuesto de un número que pertenezca al subconjunto de los reales positivos, es un **real negativo**.

Definición 5

Desigualdad. Se dice que un real a es mayor que otro real b (y se simboliza $a>b$) si se verifica que la diferencia $a – b$ es un real positivo. Es decir,

$$a > b \Leftrightarrow (a – b) \in R^+$$

Definición 6

Decimos que un real a es menor que otro real b, si b es mayor que a. Es decir,

$$a < b \Leftrightarrow b > a$$

Observación 2

Las definiciones que acabamos de enunciar nos permiten asociar la noción de positivo y negativo a la relación de desigualdad con el cero. En efecto:

i) $a > 0 \Leftrightarrow (a - 0) \in R^{+} \Leftrightarrow a \in R^{+}$
ii) $a < 0 \Leftrightarrow (0 - a) \in R^{+} \Leftrightarrow (-a) \in R^{+}$

Observación 3

La relación de desigualdad establecida en la definición 5 es una **relación de orden**. En efecto, vamos a demostrar a continuación que la relación "ser mayor que" cumple con las propiedades antisimétrica y transitiva.

Teorema 9 (Propiedad antisimétrica de la desigualdad)

Hipótesis: $a > b$

Tesis: $b \ngtr a$

Demostración:
Por hipótesis, y de acuerdo con la **definición 5**, se verifica $(a - b) \in R^{+}$
Entonces, según el **axioma 10**, no se verifica $[-(a - b)] \in R^{+}$, que es lo mismo que decir

$$(b - a) \notin R^{+}$$

o sea, nuestra tesis:

$$\boxed{b \ngtr a}$$

Teorema 10 (Propiedad transitiva de la desigualdad)

Hipótesis: $a > b$
$b > c$

Tesis: $a > c$

Demostración:
Por hipótesis, podemos afirmar que $(a - b) \in R^{+}$ y también que $(b - c) \in R^{+}$.
El **axioma 11**, entonces, nos permite afirmar lo siguiente:

$$[(a - b) + (b - c)] \in R^{+}$$
$$(a - c) \in R^{+}$$
$$\boxed{a > c}$$

Otras propiedades de la desigualdad

Teorema 11 (Monotonía de la suma)

Hipótesis: $a > b$

Tesis: $a + c > b + c$

Demostración:
Por hipótesis, y de acuerdo a la **definición 5**, se verifica $(a - b) \in R^+$
Como se verifica además $(a - b) = (a + c - b - c)$, entonces podemos afirmar:

$$[(a + c) - (b + c)] \in R^+$$

y aplicando nuevamente la definición de desigualdad, llegamos a la tesis:

$$\boxed{a + c > b + c}$$

<u>Teorema 12</u> (Monotonía del producto)

Hipótesis: $a > b$
$c > 0$

Tesis: $a.c > b.c$

Demostración:
Por hipótesis, y de acuerdo a la **definición 5**, se verifica $(a - b) \in R^+$
También por hipótesis, se cumple que $c \in R^+$
Entonces, el **axioma 11** nos permite afirmar que $(a - b).c \in R^+$
Aplicando la propiedad distributiva llegamos a

$$(a.c - b.c) \in R^+$$

y aplicando nuevamente la definición de desigualdad, llegamos a la tesis:

$$\boxed{a.c > b.c}$$

<u>Teorema 13</u>

Hipótesis: $a > b$
$c < 0$

Tesis: $a.c < b.c$

Demostración:
Sabemos ya que si, como dice la hipótesis, $c < 0$ entonces se cumple $(-c) > 0$ y por lo tanto podemos aplicar el teorema de monotonía del producto:

$$a.(-c) > b.(-c)$$

o sea

$$- a.c > -b.c$$

y por la definición de desigualdad:

$$[-a.c - (-b.c)] \in R^+$$
$$[b.c - a.c] \in R^+$$
$$b.c > a.c$$

lo que equivale a nuestra tesis:

$$\boxed{a.c < b.c}$$

Teorema 14

Hipótesis: $a > b$
$c > d$

Tesis: $a + c > b + d$

Demostración:
Aplicaremos la **propiedad de monotonía de la suma** a ambos puntos de la hipótesis:

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c$$
$$c > d \Rightarrow b + c > b + d$$

Entonces, por la **propiedad transitiva de la desigualdad**, llegamos a nuestra tesis:

$$\boxed{a + c > b + d}$$

Dejamos como ejercicio para el estudiante la demostración de las siguientes propiedades:

1) $\left.\begin{matrix} a > 0 \\ b < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a.b < 0$

2) $\left.\begin{matrix} a < 0 \\ b < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a.b > 0$

3. Conjuntos inductivos

Definición 7

Sea un conjunto $A \subset R$. Decimos que A es un **conjunto inductivo** en R si se verifican las siguientes dos condiciones:

1) $0 \in A$
2) $\forall\ a, a \in A \Rightarrow (a + 1) \in A$

Definición 8

Llamamos **conjunto de los números naturales** (N) al subconjunto de R caracterizado por las siguientes dos condiciones:

1) N es inductivo
2) Para todo conjunto inductivo A, de números reales, se verifica $A \subset N$

Es decir, que N es la intersección de todos los conjuntos inductivos.

Principio de inducción completa

El principio de inducción completa es una muy poderosa herramienta de demostración que, para los alcances de este curso, presentaremos en forma axiomática:

Axioma 12 Sea P una cierta proposición en el conjunto de los naturales, y sea n_0 un cierto número natural. Consideramos que P(n) es verdadera para todo natural n, $n \geq n_0$, si se verifican las siguientes dos condiciones:

1) $P(n_0)$ es verdadera
2) Para todo $h \in N$, la validez de P(h) implica la validez de P(h+1)