LOGARITMOS

Como seguramente el estudiante recordará, en cuarto año aprendió a trabajar con los logaritmos, y allí se enteró de que éstos se definen a partir de la necesidad de despejar el exponente de una potencia. Vamos ahora a dar algo más de rigor formal a aquellos elementos ya estudiados en el curso anterior.

Definición 1

Dados dos números reales: a (positivo) y b (positivo y diferente de 1), diremos que el ***logaritmo de a en base b*** es el número real que utilizado como exponente de la base b nos da el número a.

Es decir:

$$\log_b(a) = c \quad \Leftrightarrow \quad b^c = a$$

con las siguientes **condiciones de existencia:**

$$\mathbf{a > 0}$$
$$\mathbf{b > 0}$$
$$\mathbf{b \neq 1}$$

Ejemplo 1

Sea f: $f(x) = \log_{-x+5}(2x+6)$

Verifique el estudiante que su dominio de existencia es

$$D(f) = \{x: x \in R \ / \ -3 < x < 5 \ , \ x \neq 4\}$$

Ejercicio 1

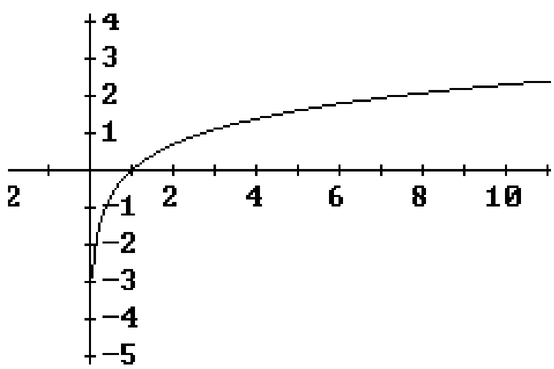
Determine los respectivos dominios de existencia de las siguientes funciones:

i) f: $f(x) = \log_{x+4}(-x^2 + 25)$

ii) g: $g(x) = \log_{x^2-1}(2x+8)$

Representación gráfica de la función logaritmo

También en este caso, apelamos a la memoria del estudiante para que recuerde lo que ya aprendió en el curso anterior. Si la base de una cierta función f: $f(x) = \log_b(x)$ es b>1, entonces su representación gráfica será de la forma:

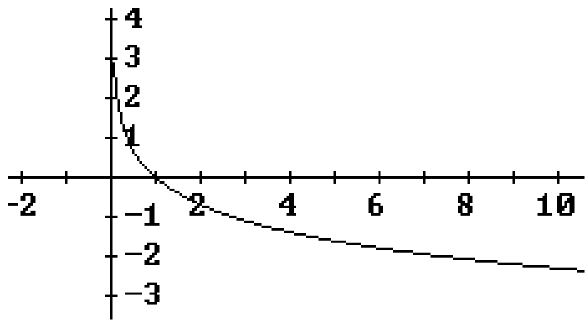


Ejercicio 2

Observando la representación gráfica anterior, justifique el estudiante las siguientes dos afirmaciones:

i) la función f es inyectiva
ii) la función f es estrictamente creciente

Si ahora, por el contrario, la base fuera b<1, para la misma función, entonces la representación gráfica sería:



Ejercicio 3

Observe el estudiante la nueva representación gráfica e indique si la función sigue siendo inyectiva y si sigue siendo estrictamente creciente. Justifique ambas respuestas.

Signo de la función logaritmo

Si observamos con atención las dos gráficas precedentes, podremos observar que, en el caso b>1 el signo de la función responde al siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} - & 0 & + \\ \hline & 1 & \end{array} \rightarrow \qquad \textbf{[1]}$$

En el caso b<1, por el contrario, el esquema del signo es:

$$\begin{array}{ccc} + & 0 & - \\ \hline & 1 & \end{array} \rightarrow \qquad \textbf{[2]}$$

Podríamos razonar así: dentro de su dominio, el signo de la función f: $f(x) = \log_b(x)$ se comporta como el signo de g: g(x) = x–1 si b>1 y como su opuesto si es b<1. Es decir que, atendiendo a la regla sobre el producto de los signos, el signo de f se comporta como el signo del producto (x – 1)(b – 1) o del cociente de las mismas expresiones.

Teniendo en cuenta que f no existe si b=1, entonces preferimos elegir el caso del cociente, y podemos decir entonces que el signo de f es, dentro de su dominio, como el signo de

$$h:\ h(x) = \frac{x-1}{b-1}$$

Si ahora generalizamos, podemos establecer la siguiente fórmula para estudiar el signo de una función logarítmica:

$$\boxed{\operatorname{sg}\left(\log_{g(x)}[f(x)]\right)=\operatorname{sg}\left(\frac{f(x)-1}{g(x)-1}\right)}$$

Ejercicio 4

i) Estudie dominio y signo de f: $f(x)=\log_{2x+5}(x^2-1)$

ii) Estudie dominio y signo de f: f(x) = $\log_{x+6}\left(\frac{4-x^2}{x+3}\right)$

Propiedades de los logaritmos

A los efectos del planteo y la demostración de cada una de las propiedades que estudiaremos a continuación, vamos a considerar de antemano que se cumplen las condiciones de existencia. Es decir, que los argumentos son positivos y que las bases son positivas y diferentes de 1.

Propiedad 1

Si utilizamos como exponente de un cierto número b el logaritmo de un número a en base b, obtendremos el número a.

Es decir:

$$b^{\log_b(a)}=a$$

Demostración:

Por definición sabemos que $\log_b(a)=c \quad \Leftrightarrow \quad b^c=a$

Entonces, sustituyendo c en la segunda igualdad obtenemos el resultado que queríamos demostrar:

$$\boxed{b^{\log_b(a)}=a}$$

Propiedad 2

Logaritmo de un producto

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los respectivos logaritmos de los factores.

Es decir:

$$\log_b(a_1.a_2)=\log_b(a_1)+\log_b(a_2)$$

Demostración:

Basándonos en la Propiedad 1 podemos escribir las siguientes dos igualdades:

$$a_1=b^{\log_b(a_1)}$$

$$a_2=b^{\log_b(a_2)}$$

Entonces, su producto será:

$$a_1.a_2 = b^{\log_b(a_1)}.b^{\log_b(a_2)}$$

Y aplicando la propiedad aprendida en cursos anteriores sobre producto de potencias de la misma base:

$$a_1.a_2 = b^{\log_b(a_1)+\log_b(a_2)}$$

Y ahora, por definición de logaritmo, llegamos a la igualdad que queremos demostrar:

$$\boxed{\log_b(a_1.a_2) = \log_b(a_1) + \log_b(a_2)}$$

Propiedad 3

Logaritmo de un cociente
El logaritmo de un cociente es igual a la resta de los respectivos logaritmos de los factores.

Es decir:

$$\log_b(a_1 : a_2) = \log_b(a_1) - \log_b(a_2)$$

Demostración:
Basándonos otra vez en la Propiedad 1 volvemos a escribir las siguientes dos igualdades:

$$a_1 = b^{\log_b(a_1)}$$
$$a_2 = b^{\log_b(a_2)}$$

Entonces, el cociente será:

$$a_1 : a_2 = b^{\log_b(a_1)} : b^{\log_b(a_2)}$$

Y aplicando la propiedad aprendida en cursos anteriores sobre división de potencias de la misma base:

$$a_1 : a_2 = b^{\log_b(a_1)-\log_b(a_2)}$$

Otra vez, por definición de logaritmo, llegamos a la igualdad que queremos demostrar:

$$\boxed{\log_b(a_1 : a_2) = \log_b(a_1) - \log_b(a_2)}$$

Propiedad 4

Logaritmo de una potencia
El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de la potencia.

Es decir:

$$\boxed{\log_b(a^n) = n.\log_b(a)}$$

Demostración:

Tomamos otra vez como punto de partida la igualdad que surge de la Propiedad 1:

$$a = b^{\log_b(a)}$$

Si elevamos ambos miembros al mismo exponente n, obtendremos:

$$a^n = \left(b^{\log_b(a)}\right)^n$$

Aplicaremos ahora la propiedad sobre potencia de una potencia:

$$a^n = b^{n.\log_b(a)}$$

Nos bastará ahora aplicar, como en los casos anteriores, la definición de logaritmo para llegar a la fórmula que queremos demostrar:

$$\boxed{\log_b(a^n) = n.\log_b(a)}$$

Propiedad 5

Cambio de base
El logaritmo de un número a en una cierta base b, es igual al cociente de los respectivos logaritmos de a y b en cualquier otra base B.

Es decir:

$$\log_b(a) = \frac{\log_B(a)}{\log_B(b)}$$

Demostración:

Como ya a esta altura habrá adivinado el estudiante, tomamos otra vez como punto de partida la igualdad que surge de la Propiedad 1:

$$a = b^{\log_b(a)}$$

Pasamos ahora a trabajar en un sistema de logaritmos de base B, y calculamos el de ambos miembros de la igualdad:

$$\log_B(a) = \log_B\left(b^{\log_b(a)}\right)$$

Como en el segundo miembro tenemos el logaritmo de una potencia, podemos aplicar la Propiedad 4:

$$\log_B(a) = \log_b(a).\log_B(b)$$

Dijimos al comienzo de esta sección sobre las propiedades, que asumíamos el cumplimiento de todas las condiciones de existencia. Por lo tanto b, por ser una base, es diferente de 1. Su logaritmo en base B es, entonces, diferente de 0. Entonces podemos dividir ambos miembros de la igualdad precedente por $\log_B(b)$, lo que nos permite llegar a la igualdad que queríamos demostrar:

$$\boxed{\log_b(a) = \frac{\log_B(a)}{\log_B(b)}}$$