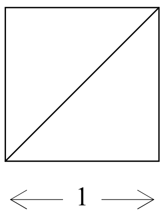
< Para volver a Menú

NÚMERO REAL

Introducción

A lo largo de nuestra vida nos hemos ido encontrando con algunas estructuras numéricas. Seguramente el lector conoce desde hace mucho tiempo a los **naturales** a los **enteros** y a los **racionales**; así como también las diferencias entre ellas y las necesidades no cubiertas por una estructura que hacen necesario la creación de la siguiente.

¿Cuáles son las insuficiencias de los racionales que hacen necesario presentar una nueva estructura algebraica? Intentemos plantear una de ellas.



Consideramos un cuadrado de lado 1 (una unidad cualquiera) y pretendemos "medir" una de sus diagonales tomando al lado como unidad. Si existiese tal medida en Q (a la cual llamaremos L) por Pitágoras cumpliría:

$L^2 = 1^2 + 1^2 \quad \Rightarrow \quad L^2 = 2$

Sí $L \in Q \quad \Rightarrow \quad L = \frac{p}{q}$ con p y q enteros primos entre si. (en otras palabras si L es un racional se puede escribir como una fracción irreducible)

$$L^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 \text{ es par} \quad \Rightarrow \quad p \text{ es par} \quad \Rightarrow \quad p = 2t \ ; t \in Z \quad \Rightarrow \quad p^2 = 4t^2$$

como $p^2 = 2q^2$ sustituyendo nos queda : $2q^2 = 4t^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 2t^2 \quad \Rightarrow \quad q^2$ es par $\quad \Rightarrow \quad$ q es par

Por lo tanto si existiese un racional $L = \frac{p}{q}$ que midiera exactamente la diagonal de un cuadrado de lado 1 tendríamos que: p es par, q es par, p y q enteros primos entre si. Lo cual es contradictorio.

En consecuencia no existe ningún racional que elevado al cuadrado sea 2 y por lo tanto los racionales no nos permiten medir la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado uno. Es inecesario resaltar la importancia que tiene disponer de una estructura con la cual poder medir cualquier longitud u otra magnitud escalar. Hemos presentado una de las incapacidades de los racionales; no la única. Elegimos esta por ser la de mayores consecuencias desde el punto de vista histórico.

"Los Pitagóricos enamorados de los números enteros creyeron que todas las cosas podían derivarse de ellos, empezando por todos los demas números. Se produjo una crisis en esta doctrina cuando descubrieron que la raíz cuadrada de 2 (La razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado) era irracional, es decir que $\sqrt{2}$ *no puede expresarse de modo preciso como la razón de dos enteros determinados por grandes que fueran estos números.*

*Este descubrimiento se llevó a cabo utilizando irónicamente como herramienta el teorema de Pitágoras. Irracional significaba en principio que un número no podía expresarse como una razón (*cociente) *Pero para los Pitagóricos llegó a suponer algo amenazador, un indicio de que su concepción del mundo podía carecer de sentido, lo cual es la otra acepción que tiene hoy la palabra irracional"* (COSMOS de Carl Sagan)

Para cubrir esta como otras carencias de los racionales presentemos a los **números reales**. Para ello existen fundamentalmente dos caminos: El constructivo; crear a los naturales, a partir de ellos a los enteros, luego a los racionales y a partir de estos últimos generar a los números reales. El otro camino consiste en crear directamente a los reales siendo los naturales, los enteros y los racionales subestructuras de los reales.

Esta última opción es la que trabajaremos en esta asignatura; la primera será vista, por lo menos parcialmente, en **"Matemática Básica"**.

Cualquiera de los dos caminos implican la utilización del método axiomático. No desarrollaremos aquí las características de este método por exceder la longitud de este trabajo y además tratarse en las otras asignaturas especiales; tanto en **"Geometría I"** como en **"Matemática Básica".** Corriendo el riesgo de caer en una simplificación excesiva diremos que: El método axiomático consiste en la aceptación de algunas proposiciones como válidas (que llamaremos **axiomas**), sin necesidad de demostración, y la deducción del resto de las proposiciones de la teoría a partir de estos.

La característica imprescindible que debe cumplir un sistema axiomático es la **consistencia**; la no contradicción de las proposiciones tomadas como axiomas (téngase en cuenta que en toda demostración por absurdo se está utilizando la consistencia del sistema). Otras propiedades como la **independencia** o la **categoricidad** no tienen porqué ser cumplidas por todos los sistemas axiomáticos.

<u>Axioma 1</u> (Axioma de cuerpo)

En un conjunto que llamaremos de los ***números reales*** (al que anotamos $\Re$) en el cual están definidas dos operaciones que denominamos ***suma*** y ***producto*** (las cuales las anotamos con + y ·· respectivamente que cumplen:

S_1) **Asociativa** $a+(b+c)=(a+b)+c \quad \forall a,b,c \in \Re$

S_2) **Conmutativa** $a+b=b+a \quad \forall a,b \in \Re$

S_3) **Neutro** $\exists\, 0 \in \Re \ ; \ a+0=0+a=a \quad \forall a \in \Re$

S_4) **Opuesto** $\forall a \in \Re \quad \exists\, op(a) \in \Re \ ; \ a+op(a)=op(a)+a=0$

P_1) **Asociativa** $a.(b.c)=(a.b).c \quad \forall a,b,c \in \Re$

P_2) **Conmutativa** $a.b=b.a \quad \forall a,b \in \Re$

P_3) **Neutro** $\exists\, 1 \in \Re \ \ 1 \neq 0 \ ; \ a.1=1.a=a \quad \forall a \in \Re$

P_4) **Inverso** $\forall a \in \Re \ \ a \neq 0 \ \ \exists\, inv(a) \in \Re \quad ; \ a.inv(a)=inv(a).a=1$

SP) **Distributiva** $a.(b+c)=a.b+a.c \quad \forall a,b,c \in \Re$

$(b+c).a=b.a+ca \quad \forall a,b,c \in \Re$

<u>Nota 1</u>

En el axioma recién enunciado aparece el término “operación”. ¿Qué entendemos por tal término? Antes de ir a una definición concreta de “operación” analicemos un caso más que familiar; la suma en los naturales. En el cual aparecen expresiones como:

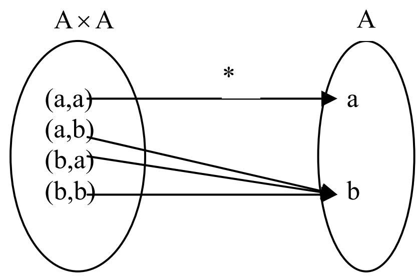
2+4=6
3+5=8
a+b=c

Cuando anotamos por ejemplo 2+4=6 aparecen en juego tres números naturales cumpliendo distintos roles (2 y 4 como sumandos y el 6 como resultado). Podemos pensar a la suma de naturales como una "correspondencia" que al par (2,4) le hace corresponder el 6, al par (3,5) el 8 .... al par de naturales (a,b) el natural c.

Y no cualquier tipo de correspondencia ya que a cada par ordenado de naturales la suma le hace corresponder un y solo un natural (el resultado de sumar ambas componentes del par). En definitiva; podemos considerar a la suma de naturales como una *función* de $N \times N$ en N.

Obsérvese que una interpretación idéntica puede hacerse con el producto de naturales; que el producto de enteros puede considerarse como una función que a pares ordenados de enteros hace corresponder un entero (o sea una función de $Z \times Z \to Z$) ; la suma de vectores como una función que a pares ordenados de vectores hace corresponder un vector;.....
Concretamente: Siendo A un conjunto no vacío llamamos **operación en A** (o ley de composición interna) a una función de $A \times A \to A$
Con esta definición podemos determinar una operación en cualquier conjunto no vacío por modesto que este sea.
Definamos una operación (llamémosla *) en el conjunto $A = \{a, b\}$

$A \times A = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$



Solemos anotar $a * a = a$ $a * b = b$ $b * a = b$ y $b * b = b$ o también presentar una tabla de doble entrada en lugar de un diagrama de "flechas".

*	**a**	**b**
a	a	b
b	b	b

<u>Ejercicio</u> Definir una operación en $B = \{m, n, p\}$
Tengamos presente entonces que una operación o una ley de composición interna en un conjunto no vacío A no es otra cosa que una función de $A \times A \to A$ y por lo tanto si tenemos una correspondencia entre pares de elementos de un conjunto A y elementos del propio A para poder afirmar que dicha correspondencia es una operación debe cumplirse:
1) La imagen de cada par (el "resultado de la operación") debe pertenecer al conjunto A. 2) Y debe ser única.

Así con esta definición de operación la resta en N no es una operación pues falla la primera condición. Y tampoco es una operación el producto de un vector por un escalar pues no estamos operando elementos del mismo conjunto.

Cabe señalar que no es la única definición de operación que puede tomarse. Sino que es la mas restrictiva pues nos obliga a " operar" con elementos del mismo conjunto (lo cual deja afuera el producto de un escalar por un vector) y también nos obliga a que el resultado sea del mismo conjunto del cual son los "operandos" (con lo cual el producto interno de vectores no sería una operación) Otras definiciones mas amplias permiten "operar" elementos de distinto conjunto y también que el resultado no pertenezca al mismo conjunto que los elementos operados. Lo que se exige en casi todas las definiciones de operación que se puede encontrar en diferente bibliografía es la *unicidad* del resultado. Nosotros adoptamos esta definición pues es la elegida en "matemática básica".

Nota 2 Si leemos con atención el axioma 1 percibimos que entre las muchas cosas que este nos dice esta que el conjunto de los números reales es un conjunto no vacío que tiene al menos dos elementos: el 0 y el 1 neutros de la suma y el producto.
Nada en este axioma implica que $\Re$ tenga mas que estos dos elementos; pues si tomamos $\Re = \{0,1\}$ y la suma y el producto definidos por

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	0

·	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

El lector podrá comprobar que este modelo verifica el axioma 1 Lo cual no solamente sirve como argumento para lo dicho sino que también para corroborar la consistencia del mismo.

Nota 3 Como recién dijimos el axioma de cuerpo no lleva a que $\Re$ tenga infinitos elementos como todos esperamos. Esto será necesariamente cierto recién cuando entre en juego el segundo axioma. El lector atento también habrá notado que se indica explícitamente en el primer axioma que $0 \neq 1$. Esto se debe a que si tal proposición no es necesariamente cierta tomando $\Re = \{0\}$ y 0+0=0 , 0.0=0 tal modelo verifica toda la axiomática que veremos sobre número real; creando un modelo trivial que no es el que andamos buscando generar.

Veamos ahora algunas proposiciones que se desprenden de manera mas o menos inmediata del axioma de cuerpo.

Teorema Unicidad de los neutros

1) 0 es el único neutro de la suma. 2) 1 es el único neutro del producto

Dem2)

Supongamos que $\exists\, 1' \in \Re$; $a.1' = 1'.a = a \quad \forall a \in \Re$ Entonces

$$\left.\begin{array}{ll} 1.1' = 1 & \text{por la suposición} \\ 1.1' = 1' & \text{por } P_3 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 1'$$

Y por lo tanto 1 es el único neutro del producto de reales.

Obsérvese que en la última implicación se utilizó que el producto es una operación en $\Re$ y por lo tanto el resultado de un mismo producto es único.

Teorema Cancelativas

1) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$

2) $\left.\begin{array}{l} a.b = a.c \\ a \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow b = c$

Dem 1) $a + b = a + c \Rightarrow op(a) + (a + b) = op(a) + (a + c) \Rightarrow [\,op(a) + a\,] + b = [op(a) + a\,] + c \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 + b = 0 + c \Rightarrow b = c$

Ejercicio 1) Justifique el lector los pasos dados en la demostración anterior
2) Demuestre justificando detalladamente el punto 2)
3) ¿Por qué en la segunda proposición se exige que el factor cancelado sea distinto de cero?

Teorema Absorción

$$a.0 = 0 \quad \forall a \in \Re$$

Dem: $a + 0 = a = a.1 = a(1 + 0) = a.1 + a.0 = a + a.0 \Rightarrow a + 0 = a + a.0 \Rightarrow 0 = a.0$

Justifique el lector todos y cada uno de los pasos dados .

Teorema Ausencia de divisores de 0

$$a.b = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \vee \\ b = 0 \end{cases}$$

<u>Dem:</u> <u>Si a=0</u> la proposición es verdadera

<u>Si $a \neq 0$</u> $\left.\begin{array}{l}\text{por hipótesis } a.b = 0 \\ \text{por el teorema anterior } a.0 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow a.b = a.0$ como además $a \neq 0 \Rightarrow_{\text{cancelativa}} b = 0$

<u>Teorema</u> Existencia y unicidad de la diferencia

H) $a, b \in \Re$ T) $\begin{cases} 1)\ \exists c \in \Re \,;\, a = c + b \\ 2)\ c \text{ es único} \end{cases}$

<u>Dem:</u> 1) $a = c + b \Leftrightarrow a + op(b) = [c + b] + op(b) \Leftrightarrow a + op(b) = c + [b + op(b)] \Leftrightarrow a + op(b) = c + 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c = a + op(b)$

Para terminar la demostración de la existencia basta tomar c=a+op(b) y realizar c+b aplicando las propiedades ya vistas el lector seguramente llegará a que c+b=a.

<u>Dem 2)</u> Supongamos que $\exists c' \in \Re \,;\, a = c' + b$ Como por lo demostrado en 1) $\exists c \in \Re \,;\, a = c + b$ entonces c+b=c'+b $\Rightarrow_{\text{canc}}$ $c = c'$

<u>Nota</u> 1) Al número c lo denominaremos **diferencia** entre a y b. Anotamos c=a-b
2) En el teorema inmediato anterior no solamente se demostró que existe c tal que a=c+b sino que también se calculó cuanto vale; llegando a que c=a+op(b). Por lo tanto $\boxed{a - b = a + op(b)}$
3) Teniendo en cuenta el resultado anterior $0 - x = 0 + op(x) = op(x) \Rightarrow op(x) = 0 - x \quad \forall x \in \Re$
Lo cual justifica la notación habitual de opuesto **op(x) = -x**

<u>Teorema</u> Existencia y unicidad del cociente.

H) $\begin{cases} a, b \in \Re \\ b \neq 0 \end{cases}$ T) $\begin{cases} 1)\ \exists c \in \Re \,;\, a = c.b \\ 2)\ c \text{ es único} \end{cases}$

Demostración a cargo del lector.

<u>Nota</u> 1) Al número c lo denominaremos **cociente** entre a y b Anotamos $c = \frac{a}{b}$
2) Cuando demostró el teorema inmediato anterior seguramente llegó a que $c = a.inv(b)$; teniendo entonces que

$$\boxed{\frac{a}{b} = a.inv(b)}$$

3) Por lo tanto $\frac{1}{x} = 1.inv(x) = inv(x) \Rightarrow \boxed{inv(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \Re^*}$ $(\Re^* = \Re - \{0\})$

<u>Ejercicios</u> (primer repartido del curso presencial)

I) Demostrar las siguientes proposiciones en $(\Re, +, \cdot)$ donde a,b,c,d son números reales.

i) op(op(a))=a **ii)** inv(inv(a))=a **iii)** $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$ **iv)** $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b \quad (a \neq 0\ \ b \neq 0)$

v) $op(0) = 0$ **vi)** inv(1)=1 **vii)** $a \neq 0 \Rightarrow -a \neq 0$ **viii)** $a + b = a - (-b)$ **ix)** $-(a + b) = -a - b$

x) $-a = (-1).a$ **xi)** $-(a.b) = (-a).b = a.(-b)$ **xii)** $(-a).(-b) = a.b$ **xiii)** $a.(b-c) = ab - ac$

xiv) $inv(a.b) = inv(a).inv(b)$ **xv)** $\frac{a}{1} = a$ **xvi)** $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ **xvii)** $inv\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b}{a}$ $(a \neq 0\ b \neq 0)$

xviii) $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a.c}{b}$ $(b \neq 0\ c \neq 0)$ **xix)** $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$ $(b \neq 0\ d \neq 0)$ **xx)** $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $(b \neq 0\ d \neq 0)$

Notas 1) En la propuesta anterior utilizamos indistintamente op(a) ó –a e inv(a) ó $\frac{1}{a}$ según consideramos conveniente

A partir de este momento utilizaremos exclusivamente la notación habitual (-a y $\frac{1}{a}$).

2) Una vez culminado este ejercicio habrá demostrado muchas de las propiedades usuales del álgebra elemental de manera relativamente sencilla y transparente utilizando exclusivamente el axioma de cuerpo y sus primeras consecuencias.

II) Hallar, justificando el procedimiento, el conjunto de los números reales x que cumplen:

i) x+2=5 **ii)** 3x+1= x-3 **iii)** 5x-2=2x+4 **iv)** 0+x=x **v)** x+x=x **vi)** x.0=0

vii) x.0=2 **viii)** (x+3).(x-1)=0 **ix)** $x^3 - 2x^2 = 0$

¿Qué otro título pondría ud. al ejercicio anterior? ¿Cómo denominaría al conjunto hallado? ¿Y a cada uno de sus elementos?

Notas

1) A manera de ejemplo hagamos un par de ejercicios.

ii) $3x + 1 = x - 3 \Leftrightarrow_{S_4} (3x+1) + (-1) = (x-3) + (-1) \Leftrightarrow_{S_1} 3x + (1 + (-1)) = x + (-3 + (-1)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow_{S_4\ y\ (*)} 3x + 0 = x - 4 \Leftrightarrow_{S_3} 3x = x - 4 \Leftrightarrow_{S_4} (-x) + 3x = (-x) + (x - 4) \Leftrightarrow_{S_1}$

$\Leftrightarrow [-1+3]x = [-x+x] - 4 \Leftrightarrow_{S_4} 2x = 0 - 4 \Leftrightarrow_{S_3} 2x = -4 \Leftrightarrow_{P_4} (\tfrac{1}{2})(2x) = (\tfrac{1}{2})(-4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow_{P_1} [(\tfrac{1}{2})2]x = -2 \Leftrightarrow_{P_4} 1.x = -2 \Leftrightarrow_{P_3} x = -2$

Por lo tanto el conjunto buscado es: $S_{ii} = \{-2\}$

iv) 0+x=x Como $0 + x = x \quad \forall x \in \Re \ (S_3)$ entonces el conjunto buscado es $S_{iv} = \Re$

2) Somos conscientes que hemos utilizado números reales (2,3,-4 etc.) que no estamos autorizados a utilizar a esta altura del desarrollo teórico. A pesar de ello lo hicimos por motivos didácticos.

Por el momento entendemos: 2=1+1 , 3=2+1, 4=3+1, -4=op(4) etc. Así también $x^2 = x.x$ y $x^3 = x.x^2$

De esta forma (*) –3+(-1) = (-1).3 +(-1).1 $=_{SP} (-1).[3+1] = (-1).4 = -4$ Obsérvese que además de utilizar el axioma 1 hemos usado algunas de las propiedades demostradas en el ejercicio I).

3) Habitualmente este ejercicio lo titularíamos: Resolver justificando el procedimiento las siguientes ecuaciones en $(\Re,+,\cdot)$ Al conjunto hallado se le suele llamar conjunto solución de la ecuación y a cada uno de sus elementos raíz de la ecuación.

Nótese que la justificación no es otra cosa que la utilización de las propiedades ya vistas de los números reales. Ni definimos ecuación; ni utilizamos "metateoremas" sobre la resolución de ecuaciones. Lo cual es mas que difícil diríamos imposible de hacer correctamente.

Ejercicio Resolver y discutir según a y b en $(\Re,+,\cdot)$ la ecuación ax+b=0

ORDEN EN LOS REALES

A continuación intentaremos introducir en $(\Re,+,\cdot)$ una relación de orden estricto total (<) y una relación de orden amplio total compatible con la suma y el producto. En pocas palabras intentaremos ordenar al cuerpo de los reales con las características previstas. Lo cual haremos por intermedio del siguiente axioma.

Axioma 2 Axioma de orden

Existe un subconjunto de los reales a los cuales denominamos reales positivos (anot. $\Re^+$) que cumple:

1) Todo real x cumple una y solo una de las siguientes proposiciones: i) $x \in \Re^+$ ii) x=0 iii) $-x \in \Re^+$

2) Si $x \in \Re^+$ e $y \in \Re^+ \Rightarrow \begin{cases} x+y \in \Re^+ \\ \wedge \\ x.y \in \Re^+ \end{cases}$

Nota Cuando en el punto 1) decimos que todo real cumple una y sólo una de las siguientes proposiciones estamos diciendo que todo real necesariamente entra en uno de esos tres “casilleros” y en solamente uno. En otras palabras queremos expresar que todo real es o positivo o cero o que su opuesto es positivo; que no hay reales que no entren en una de esas tres categorías. Y además en una sola de ellas; dicho de otra forma que un mismo real no puede ser simultáneamente positivo y cero o positivo y su opuesto también o cero y su opuesto positivo.

En el segundo punto estamos diciendo que la suma y el producto de dos reales positivos da como resultado un real también positivo. Tengamos en cuenta que para nosotros por ahora ser positivo es pertenecer a ese subconjunto de los reales del cual afirmamos su existencia en el axioma 2 y que denominamos reales positivos.

Lo que primeramente demostraremos es que el mencionado subconjunto no es vacío.

Teorema

$1 \in \Re^+$

Dem Probémoslo por absurdo. Suponemos $1 \notin \Re^+$ ya que por intermedio del Ax 1 sabemos que $1 \neq 0$ aplicando la primera proposición del axioma 2 tenemos que: $-1 \in \Re^+ \Rightarrow_{Ax2-2)} (-1).(-1) \in \Re^+$

Como demostramos anteriormente (-a).(-b)=a.b $\Rightarrow (-1).(-1) = 1.1 = 1 \Rightarrow 1 \in \Re^+$ pero habíamos supuesto que $1 \notin \Re^+$ lo cual es contradictorio.

Definición

Consideramos $a, b \in \Re$ decimos que:

1) $a < b \Leftrightarrow b - a \in \Re^+$

2) $a > b \Leftrightarrow b < a$

3) $a \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b \\ \vee \\ a = b \end{cases}$

4) $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$

Observación.- Notemos que definimos menor a través de los reales positivos cuya existencia está asegurada por el axioma de orden. Como ocurre habitualmente al definir la relación menor (mayor) queda definida su relación inversa mayor (menor).
Probemos ahora para nuestra tranquilidad que ser positivo es ser mayor que 0.

Teorema

$$x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Re^{+}$$

Demostración

$$x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x \quad \Leftrightarrow \quad x - 0 \in \Re^{+} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Re^{+}$$

Definición

Llamamos conjunto de los reales negativos (anotamos $\Re^{-}$) al conjunto formado por los opuestos de los reales positivos. Sintéticamente:

$$\Re^{-} = \left\{ x \in \Re \, ; -x \in \Re^{+} \right\}$$

Con esta definición podemos enunciar de manera mas familiar la primera proposición del axioma de orden diciendo que: todo real cumple una y una sola de las siguientes proposiciones i) es positivo ii) es cero ó iii) es negativo.

Teorema

$$x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Re^{-}$$

Demostración a cargo del lector.

Probemos que las relaciones que acabamos de definir "merecen" el nombre que les dimos.

Teorema

$<$ es una relación de orden estricto total en $\Re$. O sea cumple:

1) $a \not< a \quad \forall a \in \Re$ (Inídentica)
2) $a < b \;\Rightarrow\; b \not< a$ (Asimétrica)
3) $\left.\begin{matrix} a < b \\ b < c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a < c$ (Transitiva)
4) Todo par de reales a y b verifica una y solo uno de las siguientes proposiciones: i) a<b
ii) a=b
iii) a>b (Tricotomía)

Demostración 3)

$$\left.\begin{matrix} a < b \;\Rightarrow\; b - a \in \Re^{+} \\ b < c \;\Rightarrow\; c - b \in \Re^{+} \end{matrix}\right\} \Rightarrow_{Ax2} \; (b-a)+(c-b) \in \Re^{+}$$ como (b-a)+(c-b)=c-a entonces

$$c - a \in \Re^{+} \quad \Rightarrow \quad a < c$$

Las demás demostraciones quedan a cargo del lector.

Teorema Monotonías de la suma y el producto (compatibilidad con las operaciones)

1) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ (Monotonía de la suma)

2) $\left.\begin{array}{l} a < b \\ c < d \end{array}\right\} \Rightarrow a + c < b + d$ (Monotonía generalizada de la suma)

3) $\left.\begin{array}{l} a < b \\ c \in \Re^{+} \end{array}\right\} \Rightarrow a.c < b.c$ (Monotonía del producto)

4) $\left.\begin{array}{l} a < b \\ c \in \Re^{-} \end{array}\right\} \Rightarrow a.c > b.c$

Dem 3) Debemos probar que: $a.c < b.c \Leftrightarrow bc - ac \in \Re^{+}$

Por hipótesis $\left.\begin{array}{r} a < b \Rightarrow b - a \in \Re^{+} \\ c \in \Re^{+} \end{array}\right\} \Rightarrow_{Ax2} (b - a).c \in \Re^{+}$ Como $(b-a).c = b.c - a.c$

Entonces $b.c - a.c \in \Re^{+} \Rightarrow a.c < b.c$

Teorema (Regla de los signos del producto)

1) $a \in \Re^{+}\ b \in \Re^{+} \Rightarrow a.b \in \Re^{+}$

2) $a \in \Re^{+}\ b \in \Re^{-} \Rightarrow a.b \in \Re^{-}$

3) $a \in \Re^{-}\ b \in \Re^{-} \Rightarrow a.b \in \Re^{-}$

Demostración 2)

$\left.\begin{array}{r} b \in \Re^{-} \Rightarrow -b \in \Re^{+} \\ \text{como } a \in \Re^{+} \end{array}\right\} \Rightarrow_{Ax2} a.(-b) \in \Re^{+}$ Por lo visto en uno de los ejercicios anteriores $a.(-b) = -a.b$

En consecuencia $-a.b \in \Re^{+} \Rightarrow a.b \in \Re^{-}$ (Tengamos presente la definición adoptada de reales negativos)

Teorema Densidad

Dados dos números reales cualesquiera a y b siendo a < b se cumple que: $\exists c \in \Re\ ;\ a < c < b$

Demostración

$$\left.\begin{array}{l} a < b \Rightarrow_{\text{monot. de }(+)} a + a < a + b \\ a < b \Rightarrow_{\text{monot. de }(+)} a + b < b + b \end{array}\right\} \Rightarrow a + a < a + b < b + b \Rightarrow 2a < a + b < 2b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow_{\text{monot. del produc.}} a < \frac{a + b}{2} < b$$

Efectivamente $\exists c \in \Re \ \Big(c = \frac{a+b}{2}$

Nota En la demostración anter

$a + a = 1.a + 1.a = (1+1).a$

Entonces $1+1 > 1 > 0$ E

derecho a "bautizarlo" co

Un razonamiento similar

son números reales neces

lleva a que $\Re$ tiene infini

Ejercicios (Repartido 2 del cu

I) Demostrar que en el cuerpo c

i) $\left.\begin{array}{l} a \in \Re^- \\ \end{array}\right\} \Rightarrow a + b \in \Re^-$

V) Estudiar en $(\Re,+,\cdot,\leq)$ el sig

VI) Resolver en $(\Re,+,.,\leq)$ y di

i) $mx > 3$ **ii)** $(3-$

iv) $m^3x + 2m < 0$ **v)** $\frac{}{m}$

Nota Pasamos ahora a la resolu

IV) 1) i) $3x + 2 < 0 \Leftrightarrow_{\text{monot}}$

$\Leftrightarrow \quad x < -\frac{2}{3}$

ii) $3x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$

En resumen: **<u>Si $a > 0$</u>**

$$ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$
$$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$
$$ax + b < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

<u>Si $a < 0$</u>

$$ax + b > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$
$$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$
$$ax + b < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

Resultados que esquematizamos:

Sig (ax+b): - sig a | 0 | sig a

$-\frac{b}{a}$

Pasemos ahora a estudiar el signo de la función de segundo grado. Antes algunas proposiciones previas.

<u>Lema</u>

Siendo $a \in \Re$ llamamos $a^2 = a.a$ Se cumple que: 1) $(a-b).(a+b) = a^2 - b^2$

2) $a^2 = b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \vee \\ a = -b \end{cases}$

Demostración a cargo del lector.

<u>Resolución en $(\Re,+,\cdot,\leq)$ de $ax^2+bx+c=0$</u> $(a \neq 0)$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = -c \Leftrightarrow_{(*)} 4a^2x^2 + 4abx = -4ac \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Llamando Δ al número real $b^2 - 4ac$ como además $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax+b)^2$ tenemos que:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow (2ax+b)^2 = \Delta$$

<u>Si $\Delta>0$</u> $(2ax+b)^2 = \Delta \Leftrightarrow (3ax+b)^2 = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + b = \sqrt{\Delta} \Leftrightarrow x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ 2ax + b = -\sqrt{\Delta} \Leftrightarrow x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

Por lo tanto en este caso $S = \left\{ \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \right\}$

<u>Si $\Delta=0$</u> $(2ax+b)^2 = 0 \Leftrightarrow 2ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

Entonces si $\Delta = 0$ $S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$

<u>Si $\Delta< 0$</u> Como $\forall x \in \Re \; (2ax+b)^2 \geq 0 \Rightarrow \nexists x \in \Re ; (2ax+b)^2 = \Delta \Rightarrow S = \emptyset$

<u>Nota (*)</u> Multiplicamos ambos miembros por 4.a (tengamos presente que $a \neq 0$) con el objetivo de completar el cuadrado de un binomio. También fue el motivo por el cual sumamos b^2 en el paso siguiente.

<u>Nota</u> Somos conscientes que hemos utilizado raíz cuadrada sin haberla definido y menos demostrado que todo positivo tiene una raíz cuadrada. El desarrollo teórico hecho hasta el momento no nos lo permite (Precisamos para ello el tercer axioma). A pesar de lo dicho utilizamos $\sqrt{\Delta}$ para no postergar el estudio del trinomio de segundo grado lo cual consideramos conveniente desde el punto de vista didáctico. Preferimos aquí hacer una disgreción desde el punto de vista formal con el fin de un mejor desarrollo del curso práctico.

<u>Ejercicio</u> Consideramos $f:\Re \to \Re\,;\, f(x)=ax^2+bx+c \quad (a,b,c\in\Re\,,\, a\neq 0)$ vimos que sí $\Delta=b^2-4ac>0$ la función f tiene dos raíces reales distintas; a saber $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ y $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ Probar que:

1) $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a} \qquad \alpha.\beta=\dfrac{c}{a}$ 2) $f(x)=a.(x-\alpha).(x-\beta) \quad \forall x\in\Re$

Signo del trinomio de segundo grado

Consideramos $f:\Re\to\Re\,;\, f(x)=ax^2+bx+c$ con $a,b,c\in\Re \;\; a\neq 0.$

Si $\Delta>0$ Vimos que f acepta dos raíces reales que llamamos α y β $(\alpha<\beta)$ Además $f(x)=a.(x-\alpha).(x-\beta) \quad \forall x\in\Re$

$\forall x_1\in\Re\,;\, x_1<\alpha<\beta \;\Rightarrow\; x_1-\alpha<0$ y $x_1-\beta<0$

Por lo tanto

Si $a>0 \;\Rightarrow\; f(x_1)=a.(x_1-\alpha).(x_1-\beta)>0$ (producto de un positivo por dos negativos)

Si $a<0 \;\Rightarrow\; f(x_1)=a.(x_1-\alpha).(x_1-\beta)>0$ (producto de tres negativos)

Análogamente se prueba que: $\forall x_2\in\Re\,;\,\alpha<x_2<\beta$ si $a>0 \Rightarrow f(x_2)<0$

si $a<0 \Rightarrow f(x_2)>0$

Y que: $\forall x_3\in\Re\,;\,\alpha<\beta<x_3$ si $a>0\Rightarrow f(x_3)>0$

si $a<0\Rightarrow f(x_3)<0$

$$f(x)=ax^2+bx+c \;\Rightarrow\; 4af(x)=4a^2x^2+4abx+4ac=\underbrace{4a^2x^2+4abx+b^2}_{(2ax+b)^2}\underbrace{-b^2+4ac}_{-\Delta} \;\Rightarrow\; 4af(x)=(2ax+b)^2-\Delta$$

Si $\Delta=0$ $\Rightarrow 4af(x)=(2ax+b)^2 \Rightarrow 4af(x)\geq 0 \quad \forall x\in\Re$

Es más $4af(x)>0 \quad \forall x\in\Re\,;\, x\neq\frac{-b}{2a}$ y $f\left(\frac{-b}{2a}\right)=0$

Por lo tanto: Si $a>0 \Rightarrow 4a>0 \Rightarrow f(x)>0 \quad \forall x\in\Re\,;\,x\neq\frac{-b}{2a}$

Si $a<0 \Rightarrow 4a<0 \Rightarrow f(x)<0 \quad \forall x\in\Re\,;\,x\neq\frac{-b}{2a}$

Si $\Delta<0$ $\Rightarrow -\Delta>0$ como además $(2ax+b)^2\geq 0 \;\forall x\in\Re \Rightarrow 4af(x)=(2ax+b)^2-\Delta \quad \forall x\in\Re$

Por lo tanto: si $a>0 \Rightarrow f(x)>0 \quad \forall x\in\Re$

si $a<0 \Rightarrow f(x)<0 \quad \forall x\in\Re$

En resumen y esquemáticamen

Consideramos $f : \Re \rightarrow \Re \, ; f(x$

1) Δ>0 $\Leftrightarrow$ f acepta dos raíc

2) Δ=0 $\Leftrightarrow$ f acepta una sola

3) Δ<0 $\Leftrightarrow$ f no acepta raí

VI) Hallar los valores de m $(m \in \Re)$ para que las siguientes ecuaciones admitan dos raíces reales α y β en las condiciones indicadas.

i) $mx^2 + mx - 5 = 0 \quad ; \quad \alpha < 1 < \beta$

ii) $mx^2 + 2x - m = 0 \quad ; \quad \alpha < 0 \ , \ \beta > 1$

iii) $x^2 + mx - m + 1 = 0 \quad ; \quad \alpha < \beta < 2$

iv) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0 \quad ; \quad \alpha < \beta < -2$

v) $(m-1)x^2 + (m-3)x + m - 1 = 0 \quad ; \quad \alpha > \beta > 3$

vi) $(m-1)x^2 - 3mx + 2m = 0 \quad ; \quad -1 < \alpha < \beta < 1$

VII) Sea $f: \Re \to \Re \quad ; \quad f(x) = ax^2 + bx + c$. Determinar una condición necesaria y suficiente para que:

i) $f(x) = 0$ admita dos raíces reales α y β / $\alpha < j < \beta \quad (j \in \Re)$

ii) $f(x) = 0$ admita dos raíces reales α y β / $\alpha < j < k < \beta$

iii) $f(x) = 0$ admita dos raíces reales α y β / $\alpha \in (j,k)$ y $\beta \notin (j,k)$

iv) $f(x) = 0$ admita dos raíces reales α y β / $\alpha \in (j,k)$ y $\beta \in (j,k)$

v) $f(x) = 0$ admita dos raíces reales α y β / $\alpha > \beta > k$

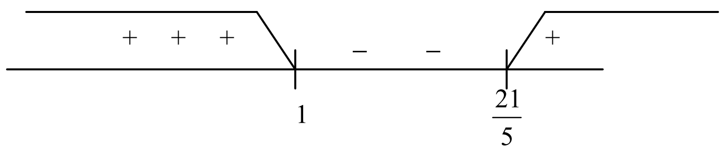
A continuación algunos ejercicios resueltos a manera de muestra.

IV) ii) La ecuación $x^2 + (3m-3)x + m^2 + 2m - 3 = 0$ acepta dos raíces reales positivas $\Leftrightarrow$

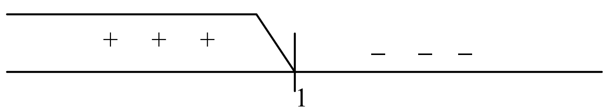
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \alpha + \beta > 0 \\ \alpha.\beta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac = (3m-3)^2 - 4.(1).(m^2 + 2m - 3) = 5m^2 - 26m + 21 > 0 \\ \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-3m+3}{1} = -3m + 3 > 0 \\ \alpha.\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{m^2 + 2m - 3}{1} = m^2 + 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2 - 26m + 21 > 0 \\ -3m + 3 > 0 \\ m^2 + 2m - 3 > 0 \end{cases}$$

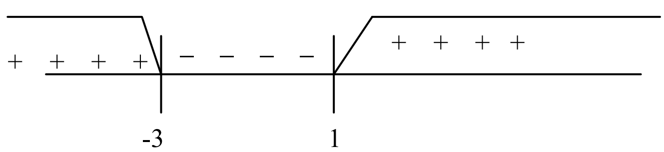
Sig $(5m^2 - 26m + 21)$



Sig (-3m+3)

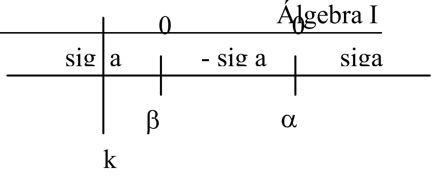


Sig $(m^2 + 2m - 3)$



La respuesta es: m < -3

VII) v) $f(x)=0$ admite dos raíces reales α y β; $\alpha>\beta>k \Leftrightarrow$ Sig $f(x)$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ a.f(k)>0 \\ \dfrac{-b}{2a}>k \end{cases}$$

Nota

Exigimos $\Delta>0$ con el objetivo de tener dos raíces reales. Con a.f(k)>0 obligamos a que f(k) tenga el mismo signo que a. Obsérvese que estas dos condiciones no son suficientes para lo exigido; pues puede cumplir ambas y ocurrir: $\beta<\alpha<k$ Para evitar este caso es que pedimos que el punto medio entre α y β sea mayor que k.

Téngase en cuenta que el punto medio entre α y β es $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\frac{-b}{a}}{2}=\dfrac{-b}{2a}$

Intente en el resto del ejercicio VII así como en el ejercicio VI) y en el V) buscar condiciones necesarias y suficientes que involucren valores calculables (discriminante, relaciones entre coeficientes y raíces, punto medio, etc.) lo mas "económicas" posibles.

Información mas detallada sobre el comportamiento del trinomio la puede encontrar en un trabajo titulado **"La función de segundo grado"** del prof. R.H.Cobas disponible en la Biblioteca de su Instituto de Formación Docente.

Valor absoluto

Definición

Consideramos un número real a . Denominamos **valor absoluto** de a (Anotamos $|a|$)

$|a|=a$ si $a\geq 0$ y $|a|=-a$ si $a<0$

Ejemplos: $|4|=4$, $|-3|=-(-3)=3$, $|0|=0$

Teorema

1) $|x|\geq 0 \quad \forall x\in\Re$

2) $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$

3) $|x^2|=|x|^2=x^2 \quad \forall x\in\Re$

4) $|x| = |y| \quad \Leftrightarrow$

5) $|x.y| = |x|.|y$

6) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad \forall$

7) $-|x| \leq x \leq$

8) Siendo $r \in \Re^{+}$

(Las proposicion

iii) $\left| \dfrac{x^2 - x}{x+1} \right| < x - \dfrac{1}{3}$

II) Analizar el valor de verdad

i) $x < 5 \Rightarrow |\, x \,| < 5$ **ii**

iv) La ecuación $|\, x - 1 \,| = |\, x$

III) Resolver en $(\Re, +, \bullet, \leq)$ **:**

i) $|\, x^2$

iii) $|\, 2x + 1 \,| \ldots |\, x - 2 \,|$