CURSO DE MATEMÁTICA 1.
Facultad de Ciencias

Repartido Teórico 2

2 de Abril de 2008

1. Derivabilidad

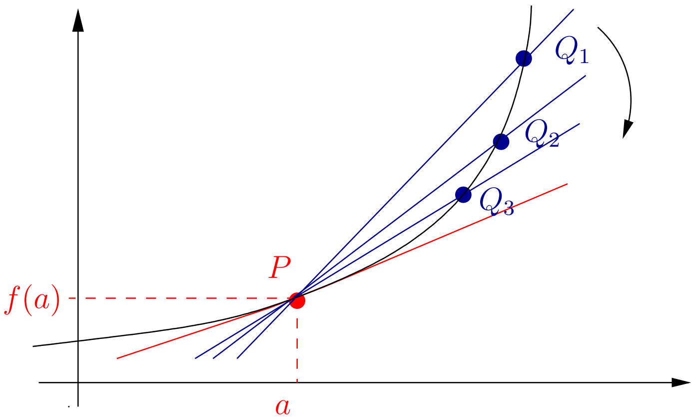
La noción de *derivada* es la herramienta básica para el estudio de la variación de una función, que es el objeto de estudio en el cálculo diferencial.

Una de las motivaciones de la definición de derivada, es obtener la ecuación de la recta tangente al gráfico de una función en un punto. Veamos ésto. Recordamos, que la ecuación de una recta por un punto con coordenadas (a, b) y pendiente m es

$$\boxed{y = m(x - a) + b}$$

Dada $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un punto $P = (a, f(a))$ en el gáfico de f donde existe la recta tangente al gráfico; queremos obtener la ecuación de esta recta tangente al gráfico de f por P.

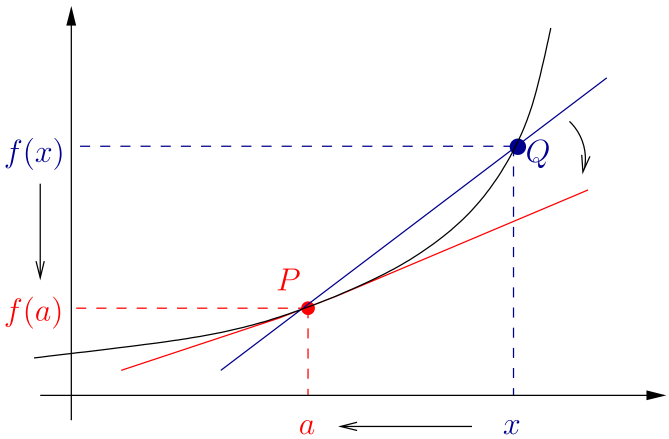
Como ya tenemos un punto perteciente a esta recta (P), sólo necesitamos obtener la pendiente de la misma. La idea para obtener este valor, es considerar rectas secantes al gráfico de f por el punto P y por otro punto del gráfico $(x, f(x))$, y considerar el límite de las pendientes de estas rectas secantes, cuando x tiende a a.



Observar en la figura anterior, que cuanto más cerca se encuentra el punto Q de P, más cerca está la recta secante de ser tangente. Por lo tanto, las pendientes de estas rectas secantes, se acercan cada vez más a la pendiente de la recta tangente. Si llamamos m_Q a la pendiente de la recta que pasa por P y por Q, y m_P a la pendiente de la recta tangente, tenemos que

$$m_P = \lim_{Q \to P} m_Q$$

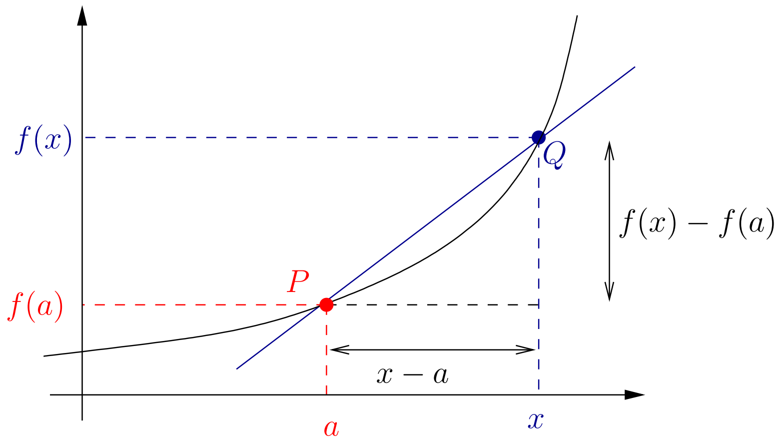
Como los puntos Q están en el gráfico de la función, $Q = (x, f(x))$ para algún x. El tomar Q cada vez más cerca de P es equivalente a tomar x cada vez más cerca de a:



Llamemos m_x a la pendiente de la recta secante que pasa por P y por $Q = (x, f(x)$, y m_a a la pendiente de la recta tangente en $(a, f(a))$. Enconces tenemos:

$$m_a = \lim_{x \to a} m_x$$

Calculemos ahora m_x para un x dado:



Tenemos que

$$m_x = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

y por lo tanto

$$m_a = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Definición Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, decimos que

$$\boxed{f \text{ es } \textbf{derivable en } \boldsymbol{a} \text{ si } \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existe y es finito.}}$$

A este límite lo llamamos la **derivada** de f en a y lo denotamos $f'(a)$. Es decir

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Observar que si denotamos $x = a + h$ donde h puede ser tanto positivo como negativo, entonces $x \to a \Leftrightarrow h \to 0$, y por lo tanto tenemos

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Esta última descripción suele resultar más conveniente a la hora de calcular los límites. Decimos que **f es derivable en un conjunto $\boldsymbol{A}$**, si f es derivable en a, $\forall\, a \in A$.

Ecuación de la Recta Tangente: Tenemos entonces que si f es derivable en a, la recta tangente al gráfico por el punto $P = (a, f(a))$ tiene pendiente $f'(a)$. Por lo tanto, la ecuación de esta recta es:

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$$

Observar que si f es continua en a, entonces si $x \to a$ tenemos que $f(x) \to f(a)$ y por lo tanto, el numerador y el denominador de $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tienden a 0 cuando x tiende a a. Es decir, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ es siempre indeterminado (del tipo "$\frac{0}{0}$")y por lo tanto, su cálculo siempre requiere cierta manipulación.

Si lo vemos con la otra definición de derivada, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$, en general se intenta factorizar una h del numerador, para luego cancelarla con la h del denominador.

Comencemos a calcular derivadas. Empezamos con las funciones más sencillas: las funciones constantes.

Ejemplo 1.1. Sea $f(x) = c$. Como la recta tangente al gráfico en cualquier punto, es la misma recta $y = c$ cuya pendiente es 0, es de esperar que $f'(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Veámoslo de la definicón de derivada:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

Ejemplo 1.2. Sea $f(x) = x$

- Calculemos $f'(2)$. Para ésto tenemos que calcular

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2 + h) - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

- Observar, que si cambiamos el 2 por a, la manipulación es la misma; es decir,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(a + h) - a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

Veamos un ejemplo un poco más complicado:

Ejemplo 1.3. Sea $f(x) = x^2$.

- Calculemos $f'(3)$:

$$\begin{aligned} f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{9+6h+h^2-9}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(6+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 6+h = 6 \end{aligned}$$

- Calculemos en general, $f'(a)$:

$$\begin{aligned} f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2a+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2a+h = 2a \end{aligned}$$

Proposición 1.4. *Si f es derivable en $a \Rightarrow f$ es continua en a.*

Demostración. Para probar que f es continua en a, necesitamos ver que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) - f(a) + f(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a).$$

Como

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \text{ (finito)},$$

tenemos que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f'(a) \times 0 = 0$$

y por lo tanto

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

□

Veamos ejemplos de cuando una función **no es derivable**.

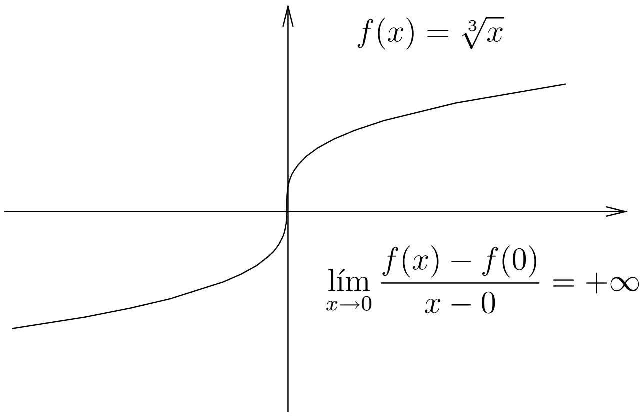
Ejemplos

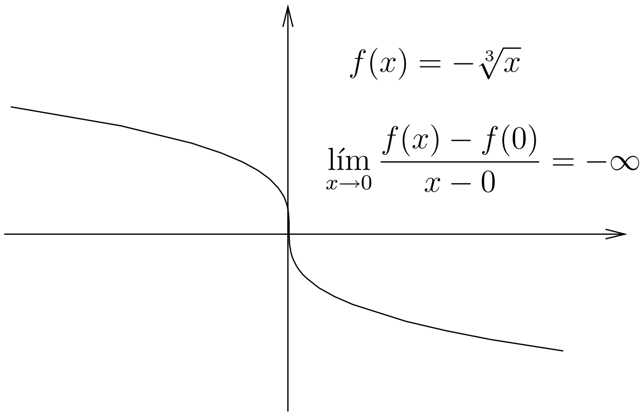
1. Por la Proposición 1.4, si f no es continua en a, entonces no es derivable en a.

2. Si la recta tangente al gráfico en el punto $(a, f(a))$ es vertical, entonces

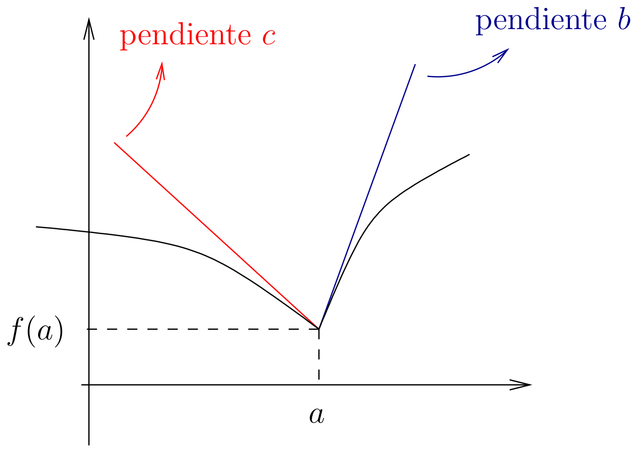
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$$

y por lo tanto, f **no es derivable en $\boldsymbol{a}$**.





3. Si $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = b$ (finito) y $\displaystyle\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c$ (finito) y $b \neq c$ entonces $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ no existe. En este caso se dice que f tiene un *punto anguloso* en a:



En este caso, a las rectas $y = b(x-a) + f(a)$ e $y = c(x-a) + f(a)$ se les llama *semitangentes* al gráfico en el punto $(a, f(a))$

Otros ejemplos de derivadas

1. Si $f(x) = e^x$, entonces
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^a(e^h - 1)}{h} = e^a \lim_{h\to a} \frac{e^h - 1}{h} = e^a \times 1 = e^a.$$
2. $f(x) = \sqrt{x}$.
$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \\ &= \lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a = 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{a}} & \text{si } a > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   Es decir, que $f(x) = \sqrt{x}$ no es derivable en $a = 0$.

Observar que dada $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si llamamos $E = \{a \in \mathbb{R} \mid f \text{ es derivable en } a\} \subset D$, entonces tenemos una nueva función
$$f'\colon E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Por los ejemplos realizados hasta ahora, tenemos

1. Si $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$.

2. Si $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$.
3. Si $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$.
4. Si $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$.
5. Si $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \forall x > 0$

Cuando queda claro que x es una variable, estas fórmulas suelen escribirse, por ejemplo

$$\left(x^2\right)' = 2x.$$

Las siguientes propiedades son útiles para calcular las derivadas de funciones menos elementales:

Proposición 1.5. *Sean f y g funciones derivables en a, y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:*

1. αf es derivable en a y

$$\boxed{(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)}$$

2. $f + g$ es derivable en a y

$$\boxed{(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)}$$

3. fg es derivable en a y

$$\boxed{(fg)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a)}$$

4. Si $g(a) \neq 0$ entonces $\dfrac{f}{g}$ es derivable en a y

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{\left(g(a)\right)^2}}$$

Demostración. La demostración de las partes a) y b) salen fácilmente utilizando la linealidad de los límites. Veamos la regla del producto:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\,g(x)-f(a)\,g(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\,g(x)-f(a)\,g(a)+f(x)g(a)-f(x)g(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\,(g(x)-g(a))+g(a)\,(f(x)-f(a))}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}+g(a)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\
&= f(a)\,g'(a)+g(a)\,f'(a)
\end{aligned}$$

Observar que en el último paso utilizamos que por ser f derivable en a, entonces es continua en a y por lo tanto $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

La regla del cociente se demuestra con una manipulación similar.

$\square$

Proposición 1.6 (Regla de la Cadena)**.** *Si g es derivable en a y f es derivable en $g(a)$, entonces $f\circ g$ es derivable en a y*

$$\boxed{(f\circ g)'(a) = f'(g(a))\;g'(a)}$$

Demostración. Por simplicidad, lo demostraremos para el caso en que $g(x)\neq g(a)$, para todo x en algún entorno reducio de a.

$$\begin{aligned}
(f\circ g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a}\,\frac{g(x)-g(a)}{g(x)-g(a)}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\;\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
&= \left(\lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\right)g'(a)
\end{aligned}$$

Si llamamos $y=g(x)$, al ser g derivable en a y por lo tanto continua, tenemos que si $x\to a$ entonces $y\to g(a)$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)} &= \lim_{y\to g(a)}\frac{f(y)-f(g(a))}{y-g(a)}\\
&= f'(g(a)) \qquad \text{por definición de } f'(g(a))
\end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$(f \circ g)'(a) = f'\left(g(a)\right)\, g'(a)$$

□

Ejemplo 1.7. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x+1$, entonces $(f \circ g)(x) = (3x+1)^2$. Para calcular $(f \circ g)'(2)$, por la regla de la cadena tenemos que

$$(f \circ g)'(2) = f'\left(g(2)\right) g'(2).$$

Como $g'(2) = 3$, $g(2) = 7$ y $f'(g(2)) = f'(7) = 2 \times 7 = 14$, concluímos $(f \circ g)'(2) = 7 \times 3 = 21$.

Si queremos calcular $(f \circ g)'(x)$ para cualquier x, tenemos que $(f \circ g)'(x) = f'\left(g(x)\right) g'(x)$.

Tenemos $g'(x) = (3x+1)' = 3$. Por otro lado $f'(x) = (x^2)' = 2x$ y por lo tanto $f'(g(x)) = 2g(x) = 2(3x+1)$. Entonces

$$(f \circ g)'(x) = 2(3x+1)3 = 6(3x+1).$$

Comentarios:

- La regla de la cadena se utiliza, cuando se tiene una función f aplicada, no a x, si no a una función de x $(g(x))$. Como $(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$, llamaremos f a la función de "afuera" y g la función de "adentro". Tenemos entonces que

$$(f \circ g)'(x) = \underbrace{f'}_{\boxed{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función de}\\ \text{afuera}}}} \underbrace{(g(x))}_{\boxed{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función de}\\ \text{adentro}}}} \underbrace{g'(x)}_{\boxed{\substack{\text{por la}\\ \text{derivada de}\\ \text{la función de}\\ \text{adentro}}}}$$

- Esto quiere decir, que si en vez de x, tenemos una función como variable, hacemos la derivada igual que antes, manteniendo la nueva variable, y luego multiplicamos por la derivada de la variable.

  En el ejemplo anterior, puede resultar más sencillo el siguiente camino:

$$\left((3x+1)^2\right)' = 2(3x+1) \times (3x+1)' = 2(3x+1)3 = 6(3x+1).$$

- Otra notación que a veces resulta conveniente para la derivada es

$$f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

Si llamamos $u = g(x)$, otra forma de escribir la regla de la cadena es

$$\boxed{\tfrac{d}{dx} f(u) = \tfrac{df}{du} \times \tfrac{du}{dx} = \tfrac{df}{du} \times u'(x)}$$

donde $\dfrac{df}{du}$ es la derivada de f si u es la variable, y $\dfrac{du}{dx}$ es la derivada de u (con variable x). En el ejemplo anterior, si llamamos $u = 3x + 1$, tenemos

$$\big((3x+1)^2\big)' = \frac{d\,u^2}{dx} = \frac{d\,u^2}{du} \times u'(x) = 2u \times u' = 2(3x+1)3 = 6(3x+1)$$

A veces, en las tablas de derivadas, se proporcionan las fórmulas con la regla de la cadena incluída. Por ejemplo, suele aparecer

$$\big(u^2\big)' = 2\,u\,u'.$$

- Si f tiene inversa f^{-1}, tenemos que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$; es decir que

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

y por lo tanto

$$(f \circ f^{-1})'(x) = 1.$$

Si usamos la regla de la cadena en la izquierda de la ecuación, obtenemos:

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$$

y por lo tanto $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$

Ejemplo 1.8. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es $f(x) = e^x$, entonces $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es $f^{-1}(x) = \log(x)$. Entonces

$$(\log(x))' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(\log(x))}$$

Y como $f'(x) = (e^x)' = e^x$, tenemos que

$$f'(\log(x)) = e^{\log(x)} = x$$

y por lo tanto

$$(\log(x))' = \frac{1}{x}.$$

Ejemplo 1.9. Veamos ahora las derivadas de las funciones trigonométricas. Para ésto necesitamos recordar:

1. $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\operatorname{sen}(b)$
2. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$
3. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$
4. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$

- Si $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, entonces:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+h) - \operatorname{sen}(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a)\cos(h) + \cos(a)\operatorname{sen}(h) - \operatorname{sen}(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\operatorname{sen}(a) \left(\frac{\cos(h)-1}{h} \right) + \cos(a) \left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \right) \right) = \operatorname{sen}(a) \times 0 + \cos(a) \times 1 \\ &= \cos(a). \end{aligned}$$

- Si $f(x) = \cos(x)$, entonces:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(a)\cos(h) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(h) - \cos(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\cos(a) \left(\frac{\cos(h)-1}{h} \right) - \operatorname{sen}(a) \left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \right) \right) = \cos(a) \times 0 - \operatorname{sen}(a) \times 1 \\ &= -\operatorname{sen}(a). \end{aligned}$$

- Si $f(x)=\tan(x)$, como $\tan(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, utilizamos la regla del cociente:

$$\begin{aligned}
(\tan(x))' &= \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{(\operatorname{sen}(x))'\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\,(\cos(x))'}{(\cos(x))^2}\\
&= \frac{\cos(x)\cos(x)-\operatorname{sen}(x)(-\operatorname{sen}(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}\\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}
\end{aligned}$$

Para finalizar con las fórmulas de derivadas de las funciones elementales, veamos las funciones de potencia:

Ejemplo 1.10. Si $f(x)=x^n$ con $n\in\mathbb{R}$, entonces

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{h}$$

Si $a=0$, nos queda

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{h^n}{h}=\lim_{h\to 0}h^{n-1}=\begin{cases}0 & \text{si } n-1>0\\ \pm\infty & \text{si } n-1<0\\ 1 & \text{si } n-1=0\end{cases}$$

Por lo tanto, f es derivable en $0 \iff n-1\geq 0$. Si $n>1\Rightarrow f'(0)=0$. Observar que si $n=1$, lo anterior nos dice que $f'(0)=1$, hecho que ya sabíamos pues $f(x)=x$ en este caso. Si $a\in Dom(f)$ y $a\neq 0$, entonces

$$f'(a)=na^{n-1}. \tag{1}$$

No demostraremos el caso general ($\forall n\in\mathbb{R}$); para $n\in\mathbb{N}$, lo demostramos por inducción completa:

- *Caso inicial:* $n=0$. En este caso $f(x)=1$ para todo x, y por lo tanto $f'(a)=0$ para todo $a\in\mathbb{R}$, y se cumple la fórmula (1).

- *Paso inductivo*: Asumiendo que la fórmula (1) se cumple para n, probemos que se cumple para $n+1$: Si $f(x)=x^{n+1}$ entonces $f(x)=g(x)h(x)$ donde $g(x)=x^n$ y $h(x)=x$. Tenemos que $h'(a)=1$ y como la fórmula se cumple para n, tenemos que $g'(a)=na^{n-1}$. Utilizamos la regla para la derivada de un producto:

  $$f'(a)=g'(a)h(a)+g(a)h'(a)=na^{n-1}a+a^n1=na^n+a^n=(n+1)a^n,$$

  y por lo tanto la fórmula se cumple para $n+1$.

Juntando todos los ejemplos, tenemos la siguiente tabla de derivadas:

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f'(x)}$
$c \in \mathbb{R}$	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\log(x)$	$1/x$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$
$\tan(x)$	$1/\cos^2(x)$

Utilizando la fórmula para la derivada de la inversa se puede probar que

- $(\operatorname{arc\,sen}(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Derivadas de mayor orden:

Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en un intervalo abierto E, tenemos la función $f' : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si esta función f' es derivable en un punto a, a su derivada la llamamos **la derivada segunda de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$** y la escribimos $f''(a)$; tenemos entonces una nueva función,

$$f''(x) = (f')'(x).$$

De igual manera se definen las derivadas sucesivas. La derivada de ornden n se escribe $f^{(n)}(a)$. Tenemos entonces las funciones

$$f(x) \xrightarrow{\prime} f'(x) \xrightarrow{\prime} f''(x) \xrightarrow{\prime} \cdots \xrightarrow{\prime} f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x).$$

Ejemplo 1.11. Se $f(x) = x^4 + 3x^2 + x - 2$, entonces $f'(x) = 4x^3 + 6x + 1$, $f''(x) = 12x^2+6$, $f^{(3)}(x) = 24x$, $f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(5)}(x) = 0$ y por lo tanto $f^{(n)}(x) = 0$ si $n \geq 5$

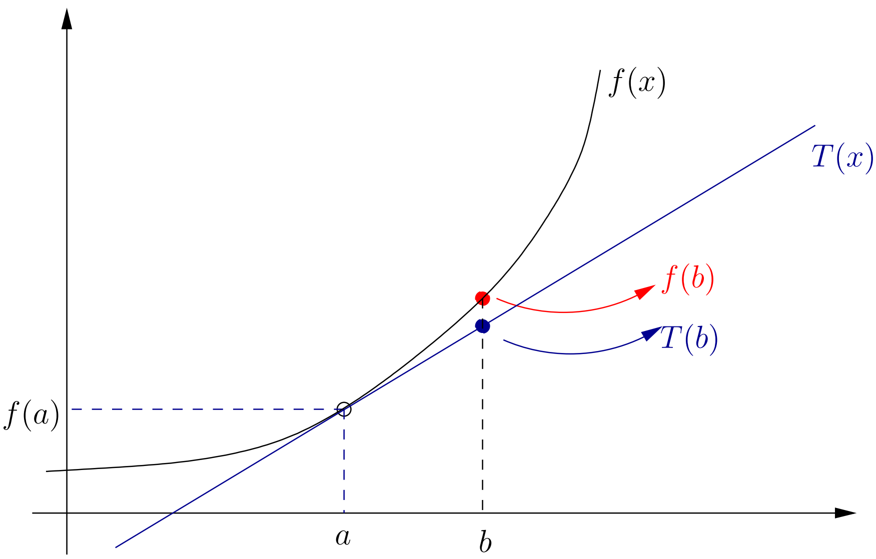
2. Aplicaciones

Estimaciones

Si f es derivable en a, entonces la recta tangente al gráfico en el punto $(a, f(a))$ es el gráfico de la función

$$\boxed{T(x) = f(a) + f'(a)(x - a)}$$

Éste es el polinomio de grado 1 que mejor aproxima a f alrededor de a; en el sentido de que $f(a) = T(a)$ y $f'(a) = T'(a)$. A esta función se le llama **Polinomio de Taylor de orden 1**. Observar que si b es un punto cercano a a, entonces $T(b)$ es cercano a $f(b)$, y por lo tanto $T(b)$ es una estimación de $f(b)$ $(T(b) \simeq f(b))$.

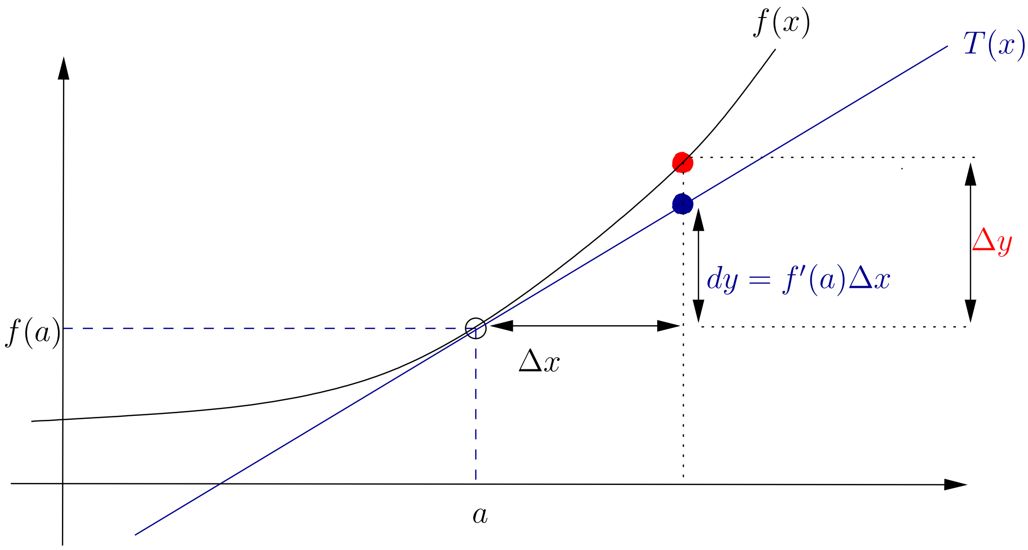


Ejemplo 2.1. Si queremos aproximar el valor de $\sqrt{9{,}006}$. Sea $f(x) = \sqrt{x}$, necesitamos aproximar $f(9{,}006)$. Como 9.006 es cercano a 9, y los cálculos son más sencillos en 9, podemos utilizar la aproximación por la tangente en el punto $(9, f(9)) = (9, 3)$. Para ésto necesitamos el valor de $f'(9)$: Tenemos que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ y por lo tanto $f'(9) = \dfrac{1}{2\sqrt{9}} = \dfrac{1}{6}$. Entonces el Polinomio de Taylor es

$$T(x) = f(9) + f'(9)(x - 9),$$

es decir
$$T(x) = 3 + \frac{1}{6}(x-9).$$
Si utilizamos $T(x)$ para aproximar $\sqrt{9{,}006}$, obtenemos
$$T(9{,}006) = 3 + \frac{1}{6}(9{,}006 - 9) = 3 + \frac{1}{6}0{,}006 = 3{,}001.$$
y por lo tanto $\sqrt{9{,}006} \simeq 3{,}001$

Otra aplicación de la aproximación tangente, es estimar el incremento Δf de una función en las proximidades de un punto a donde f es derivable. Si llamamos Δy al incremento de f correspondiente a un incremento en x de Δx, entonces el incremento correspondiente a $T(x)$, que llamamos dy es una buena aproximación de Δy si Δx es pequeño. Ahora, como $f'(a) = \dfrac{dy}{\Delta x}$ tenemos que
$$dy = f'(a)\Delta x,$$
y por lo tanto
$$\Delta y \simeq dy = f'(a)\Delta x.$$



Ejemplo 2.2. Si el radio de un círculo aumenta de 2 a 2,001, estimar el cambio de su área.

Tenemos que el área del círculo (en función de su radio r) es
$$A = f(r) = r^2\pi.$$

Tenemos que $\Delta r = 0{,}001$ y queremos estimar ΔA. Utilizamos la aproximación de la tangente en $a = 2$:

$$\Delta A = \Delta y \simeq dy = f'(2)\Delta x = f'(2)0{,}001.$$

Como $f(r) = r^2\pi$, tenemos que $f'(r) = 2\pi r$ y por lo tanto $f'(2) = 4\pi r$. Entonces

$$\Delta A \simeq 4\pi \times 0{,}001 = 0{,}004\pi.$$

Comentario: La idea de la aproximación de la función f por su tangente en las cercanías de un punto donde es derivable, puede ser mejorada usando un polinomio de grado $n \geq 2$. Una buena aproximación es con un polinomio $P(x)$ tal que

$$P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a), \quad P''(a) = f''(a), \quad \cdots \quad P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Ejercicio: Sea $f\colon D \to \mathbb{R}$ derivable de orden n en a y

$$P(x) = f(a) + A_1(x-1) + A_2(x-a)^2 + \cdots + A_n(x-a)^n$$

el polinomio de grado n que mejor aproxima a f en las cercanías de a. Probar que

$$A_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

A $P(x)$ se le llama **polinomio de Taylor de $\boldsymbol{f(x)}$ de orden $\boldsymbol{n}$ en $\boldsymbol{a}$**.

Velocidades

Si un objeto se mueve en una recta, y su posición al tiempo t está dada por una función $f(t)$, para calcular la velocidad instantánea en un tiempo t_0 dado, podemos hacer lo siguiente:

Primero, calculamos la velocidad media que tuvo el objeto en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0+h]$, la llamamos $\bar{v}_{[t_0,t_0+h]}$. Tenemos entonces que

$$\bar{v}_{[t_0,t_0+h]} = \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{t_0+h-t_0} = \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}.$$

Luego, la **velocidad instantánea** del objeto al tiempo t_0 es el límite de las velocidades medias, cuando el intervalo de tiempo tiende a 0; es decir

$$v(t_0) = \lim_{h\to 0} \bar{v}_{[t_0,t_0+h]} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}.$$

Observar que por la definición de derivada, si este límite existe, entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}=f'(t_0).$$

Es decir, $v(t_0)=f'(t_0)$.

Si seguimos el mismo razonamiento para calcular la **acelaración instantánea** del objeto al tiempo t_0, $a(t_0)$, como la aceleración es la tasa de variación de la velocidad, tenemos

$$a(t_0)=v'(t_0)=f''(t_0).$$

Por lo tanto

> Si la posición de un objeto al tiempo t está dada por $f(t)$, y f es derivable $\Rightarrow$
> la velocidad instantánea del objeto al tiempo t es
> $v(t)=f'(t)$
> y la aceleración instantánea es
> $a(t)=f''(t)$.

Tasas de variación instantáneas

El ejemplo anterior de velocidades instantáneas es un caso particular de tasas de variación instantáneas. Si el estado de un sistema al tiempo t está dado por una función $f(t)$ (f puede ser temperatura, tamaño, volumen, posición...) entonces la variación del estado en el intervalo de tiempo es $[t_0,t_0+h]$ es $f(t_0+h)-f(t)$, y por lo tanto, la tasa de cambio media en ese intervalo es $\frac{f(t_0+h)-f(t)}{h}$. Entonces, al igual que para el ejemplo de velocidades, si f es derivable en t_0 la **tasa de variación instantánea** en el tiempo t_0 es

$$r(t_0)=f'(t_0).$$

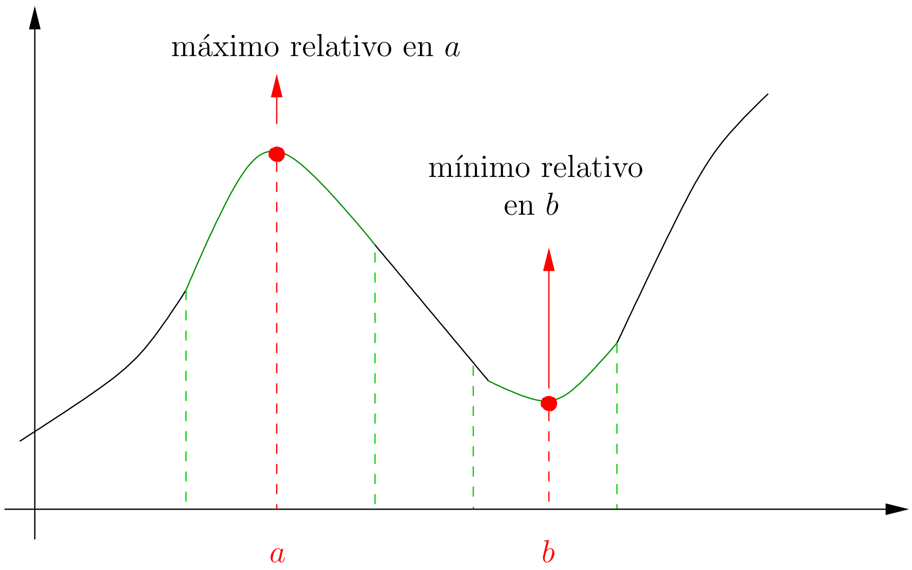
3. Valores extremos de una función

Otra aplicación de las derivadas, es que se utilizan para hallar valores extremos de una función.

Definición 3.1. Sea $f\colon D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Si a es un punto interior de D, decimos que f **tiene un máximo relativo en a**, si existe un entorno $E(a,\delta)$ tal que

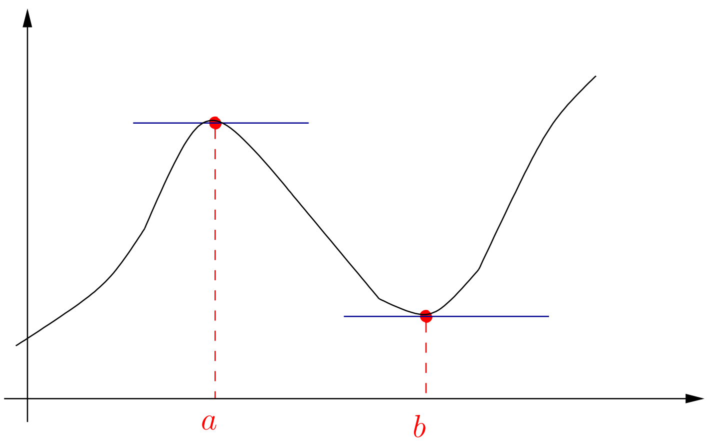
$f(x) \leq f(a)$, $\forall\, x \in E(a, \delta)$. Esto quiere decir que $f(a)$ es mayor o igual a los valores de la función en puntos cercanos a a.

Análogamente, decimos que f **tiene un mínimo relativo en** $\boldsymbol{a}$, si existe un entorno $E(a, \delta)$ tal que $f(x) \geq f(a)$, $\forall\, x \in E(a, \delta)$. Es decir, $f(a)$ es menor o igual a los valores de la función en puntos cercanos a a.



Decimos que f tiene un **extremos relativo en** $\boldsymbol{a}$ si tiene un máximo o un mínimo relativo en a.

Observar en la siguiente figura que en los extremos relativos las tangentes al gráfico son horizontales.



Ésto sucede en general:

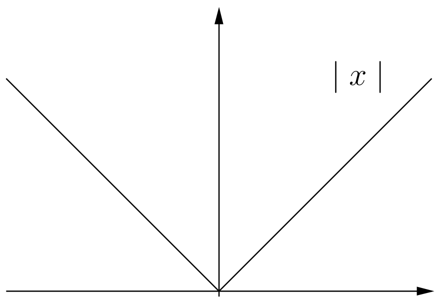
Teorema 1 (Condición necesaria para la existencia de extremo relativo)**.** *Sea $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f tiene un extremo relativo en a y existe $f'(a) \Rightarrow f'(a) = 0$.*

Decimos que a es un **punto crítico de** f, si $f'(a) = 0$ o si $f'(a)$ no existe.
El teorema anterior nos dice que:

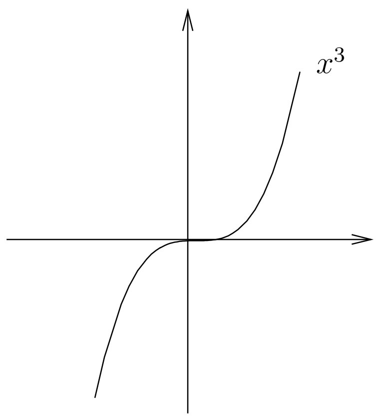
Los candidatos para extremos relativos de f son los puntos críticos de f.

Comentarios:

- La función f puede tener un extremo relativo en a sin que exista $f'(a)$. Por ejemplo, si $f(x) = \mid x \mid$, $f'(0)$ no existe y sin embargo f tiene un mínimo relativo en 0:



- También puede pasar que $f'(a) = 0$, pero f **no** tiene un extremo relativo en a. Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$ y por lo tanto $f'(0) = 0$, sin embargo, f no tiene ni mínimo ni máximo relativo en 0:



Ejemplo 3.2. Hallar los puntos críticos de $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Necesitamos hallar los puntos a tales que $f'(a)$ no existe o $f'(a) = 0$. Como f es un polinomio, $f'(a)$ existe para todo $a \in \mathbb{R}$. Calculamos $f'(x) = 3x^2 - 3$ y resolvemos $f'(x) = 0$:

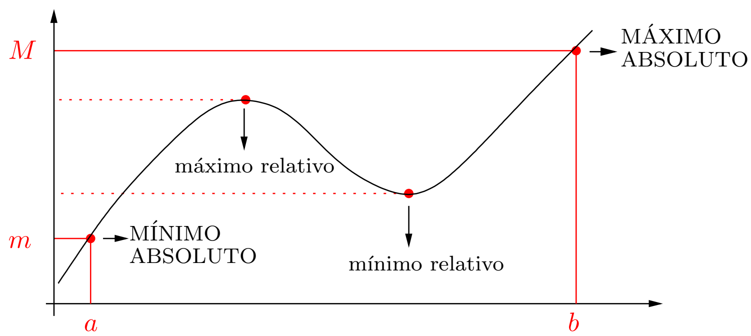
$$f'(x) = 0 \iff 3x^2-3 = 0 \iff 3(x^2-1) = 0 \iff x^2-1 = 0 \iff \begin{cases} x = 1 & \text{o} \\ x = -1 \end{cases}$$

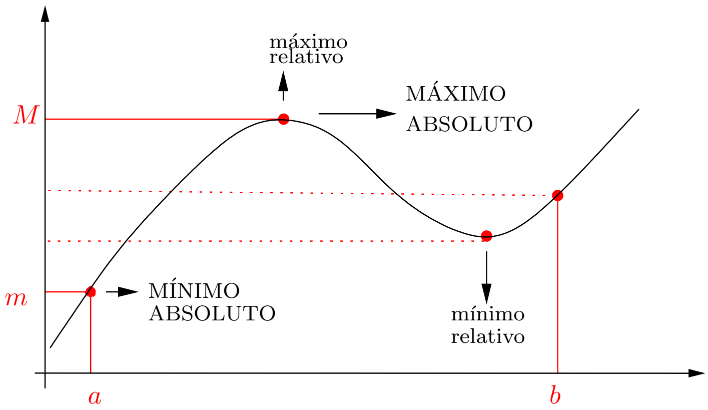
Por lo tanto, los puntos críticos de f son 1 y -1.

Definición 3.3. Sea $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $T \subset D$. Decimos que ***f* tiene un máximo absoluto en *T***, si existe $a \in T$ tal que $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in T$. Al valor $f(a)$ lo llamamos el máximo de f en T. Análogamente, decimos que ***f* tiene un mínimo absoluto en *T***, si existe $b \in T$ tal que $f(b) \leq f(x)$ para todo $x \in T$. Al valor $f(b)$ lo llamamos el mínimo de f en T

Comentarios:

- Si un extremo absoluto de f se presenta en un punto a interior a T, entonces f tiene un extremo relativo en a.
- Por lo tanto, los extremos absolutos de f se pueden encontrar solamente en algunos de los siguiente puntos: extremos de T, puntos de T donde $f'(x)$ no existe y puntos de T donde $f'(x) = 0$.





El siguiente resultado asegura la existencia de extremos absolutos en determinadas condiciones:

Teorema de Weirstrass:

Si f es continua en $[a, b] \Rightarrow f$ **tiene máximo y mínimo absoluto** en $[a, b]$.
Es decir, $\exists\, c, d \in [a, b]$ tal que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)\ \forall x \in [a, b]$

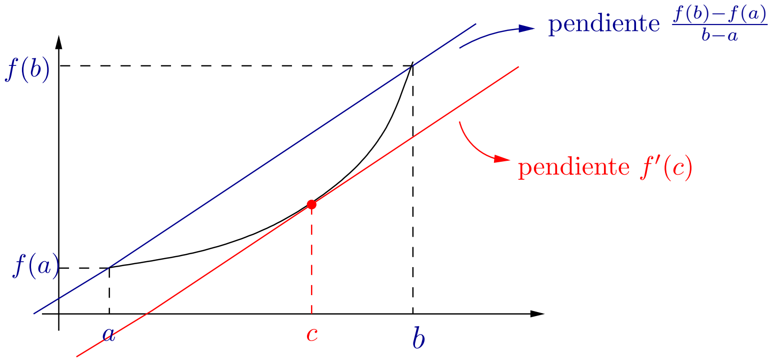
Ejemplo 3.4. Hallemos el máximo y mínimo absoluto de $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en el intervalo $[0, 2]$. Por el Teorema de Weirstrass, sabemos que existen el máximo y el mínimo absoluto. Ya vimos que los puntos críticos de f son 1 y -1, pero solamente $x = 1 \in [0, 2]$. Tenemos entonces los siguientes candidatos para puntos donde se puede encontrar el máximo y el mínimo absoluto:

- Extremos del intervalo: $x = 0$ y $x = 2$
- Puntos críticos en el intervalo: $x = 1$.

Como el máximo y el mínimo de f se toman en esos puntos, el mayor de los valores $f(0)$, $f(2)$ y $f(1)$ será el máximo absoluto de la función en $[0, 2]$, y el menor de esos valores será el mínimo absoluto. Calculamos $f(0) = 1$, $f(2) = 2^3 - 3 \times 2 + 1 = 3$ y $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$. Por lo tanto, el máximo de la función en el intervalo $[0, 2]$ es 3 (y se da en $x = 2$), y el mínimo es -1 (y se da en $x = 1$).

4. Teorema del Valor Medio

Es uno de los resultados más importantes que involucra la noción de derivada. Bajo ciertas condiciones, como se observa en la siguiente figura, hay por lo menos un punto $(c, f(c))$ por el cual la tangente al gráfico de f es paralela a la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



Teorema del Valor Medio:

$$\text{Si } f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ es continua y derivable en } (a,b) \Rightarrow$$
$$\exists\, c \in (a,b) \;/\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Consecuencias del Teorema del Valor Medio:

Proposición 4.1. *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f'(x) = 0\ \forall\, x \in (a,b)$, entonces $f(x) = f(a)\,\forall\, x \in [a,b]$ (es decir, $f(x)$ es constante).*

Demostración. Si $x \in (a,b]$, aplicando el Teorema del Valor Medio en $[a,x]$ obtenemos que $\exists\, d \in (a,x)$ tal que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(d) = 0$. Entonces $f(x) - f(a) = 0$ y por lo tanto $f(x) = f(a)$. □

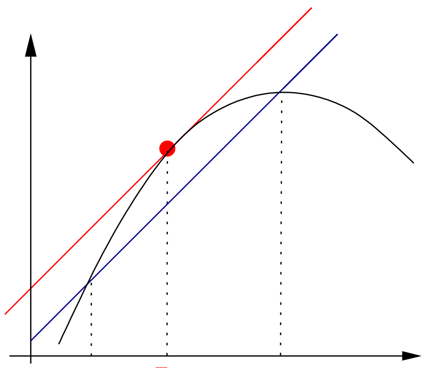
Corolario:
Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas, tales que $f'(x) = g'(x)\ \forall\ x \in (a,b) \Rightarrow f(x) = g(x) + K$ (K constante) $\forall\, x \in [a,b]$.

Proposición 4.2. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.*

1. *Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es* **creciente** *en (a,b).*
2. *Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es* **decreciente** *en (a,b).*
3. *Si f es continua en $c \in (a,b)$ y $f'(x) \geq 0$ en (a,c) y $f'(x) \leq 0$ en (c,b) entonces f tiene un* **máximo** *en c.*

4. *Si f es continua en $c \in (a,b)$ y $f'(x) \leq 0$ en (a,c) y $f'(x) \geq 0$ en (c,b) entonces f tiene un* **mínimo** *en c.*

Demostración. Probaremos la parte 3) (las otras se demuestran de forma similar). Primero probaremos que $f(x) \leq f(c)$, $\forall\, x \in (a,c)$; esto es equivalente a probar que la pendiente de la recta por los puntos $(x, f(x))$ y $(c, f(c))$ tiene pendiente positiva o 0.



Ahora, la pendiente de la recta secante es

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x}$$

y aplicando el Teorema del Valor Medio al intervalo $[x,c]$, tenemos que $\exists\, \bar{x} \in (x,c)$ tal que

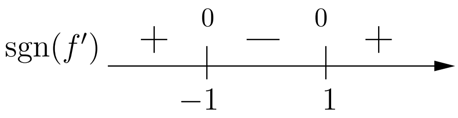
$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} = f'(\bar{x}) \geq 0.$$

Observar que esto implica $f(c) \geq f(x)$ ya que $c - x > 0$ y

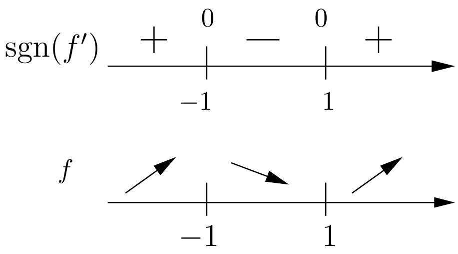
$$f(c) - f(x) = f'(\bar{x})(c - x) \geq 0.$$

De la misma forma se prueba que $\forall\, x \in (c,b)$, $f(x) \leq f(c)$ y por lo tanto f tiene en c un máximo. $\square$

Ejemplo 4.3. Estudiar el crecimiento de $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Por la Proposición anterior, tenemos que estudiar el signo de $f'(x)$. Ya vimos que $f'(x) = 0 \iff x = 1$ o $x = -1$. Por lo tanto tenemos las raíces de $f'(x)$ y nos resta saber el signo de f' en los intervalos determinados por estos puntos. Tenemos:



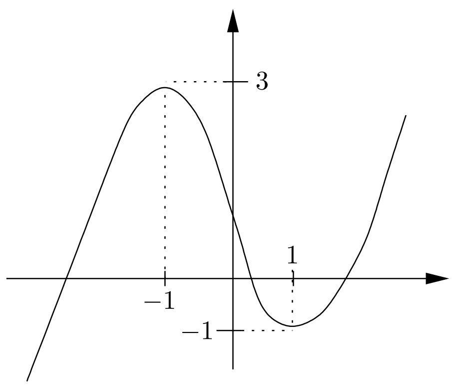
y por lo tanto, f es creciente en los intervalos $(\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1, 1)$.



Si calculamos los valores de $f(-1)$ y $f(1)$ podemos obtener un bosquejo de la gráfica de f. Tenemos que $f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$ y $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$. Calculamos también los límites en infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

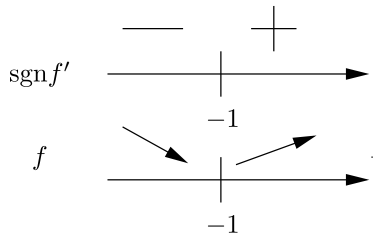
Bosquejamos con toda esta información:



Ejemplo 4.4. Hallar, si existen, los extremos absolutos de $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$. Como no estamos trabajando en un intervalo cerrado, no podemos utilizar el Teorema de Weirstrass y por lo tanto no sabemos si f tiene máximo o mínimo absoluto en $\mathbb{R}$. Estudiemos entonces el crecimiento de la función; necesitamos el signo de $f'(x)$. Tenemos

$$f'(x) = 0 \iff 6x + 6 = 0 \iff x = -1.$$

Veamos ahora el signo ede f' en los intervalos determinados por este punto:

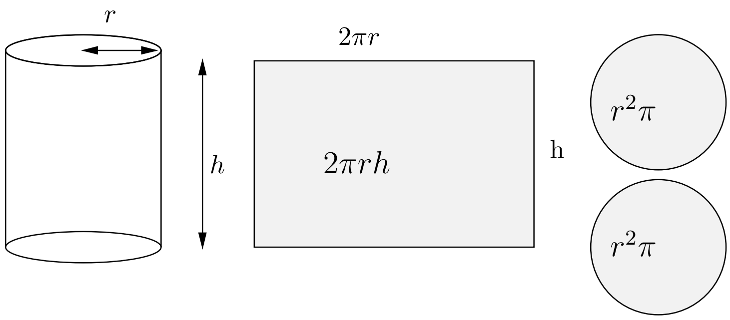


Por lo tanto, f es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(-1, +\infty)$; entonces f **no** tiene máximo absoluto en $\mathbb{R}$, pero tiene mínimo absoluto (y se da en $x = -1$). El mínimo absoluto de f es $f(-1) = 3 - 6 + 2 = -1$.

Ejemplo 4.5. Se fabrican envases cilíndricos metálicos de espesor constante con un volumen $V = 16\ cm^3$ fijo. Se quiere determinar las dimensiones del envase para que se utilice la menor cantidad de metal posible.

La cantidad de metal utilizado está dada por el área de la superficie del cilindro. Si el cilindro tiene altura h y radio r, el área de la superficie es

$$A = 2\pi r h + 2(r^2\pi)$$



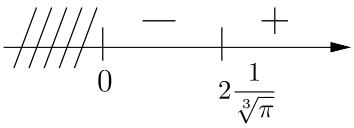
Esta función de área depende de dos variables (r y h). Pero tenemos una condición, y es que el volumen tiene que ser 16. $V = \pi r^2 h = 16$ y por lo tanto $h = \dfrac{16}{\pi r^2}$. Entonces la función de área nos queda solamente con variable r (susituyendo en la fórmula de A, $h = \dfrac{16}{\pi r^2}$)

$$A(r) = 2\pi r \frac{16}{\pi r^2} + 2r^2\pi = \frac{32}{r} + 2r^2\pi$$

Ahora necesitamos encontrar el mínimo de la función $A(r)$ con $r \in (0, +\infty)$. Para ésto necesitamos el signo de $A'(r)$. Tenemos

$$A'(r) = 32(-1)\frac{1}{r^2} + 4\pi r = \frac{4\pi r^3 - 32}{r^2}$$

y por lo tanto $A'(r) = 0 \iff r = \sqrt[3]{\frac{32}{4\pi}} = 2\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$

sgn$(A'(r))$ 

Por lo tanto, el mínimo absoluto de $A(r)$ se da cuando $r = 2\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$; para este valor del radio, la altura del cilindro es $h = \frac{16}{\pi r^2} = \frac{16}{\pi 4 \frac{1}{\sqrt[3]{\pi^2}}} = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$.

5. Regla de L'Hôpital

La Regla de L'Hôpital es una aplicación de las derivadas para calcular límites con indeterminaciones del tipo "$\frac{0}{0}$" y "$\frac{\infty}{\infty}$":

- Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

$g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq c$ en un intervalo que contiene a c y

$$\begin{cases} \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0 \\ \text{o} \\ \lim_{x \to c} \mid f(x) \mid = \lim_{x \to c} \mid g(x) \mid = \infty \end{cases}$$

entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Ejemplos:

1. Calculemos $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x)}{x}$.

   Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \log(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ y $(x') = 1 \neq 0 \,\forall\, x$, podemos utilizar la regla de L'Hôpital y tenemos:

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

2. En este ejemplo utilizamos la regla dos veces:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

3. A veces, si bien la expresión no esta pronta para utilizar la regla, una pequeña manipulacion nos permite utilizarla:

   $$\lim_{x\to 0+} (x\log(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

   Es decir, con una manipulación adecuada, la regla también es útil para indeterminaciones del tipo "$\infty\, 0$".

4. El resultado anterior nos permite calcular un límite con indeterminación del tipo "0^0":

   $$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim_{x\to 0^+} \log(x^x)} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\log(x)} = e^0 = 1$$