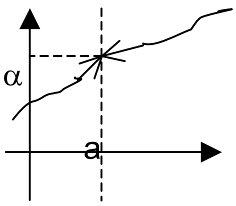
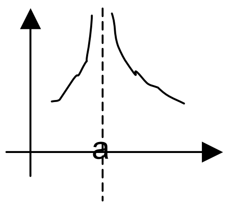
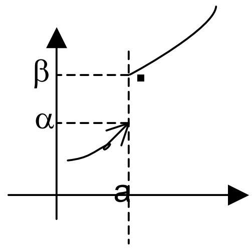
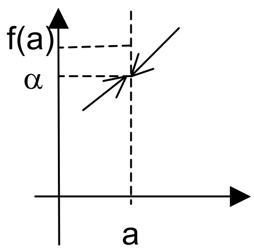
CONTINUIDAD-CURSO 6TO-MATEMÁTICA
SÍNTESIS TEÓRICO-PRÁCTICA PROF. SERGIO WEINBERGER

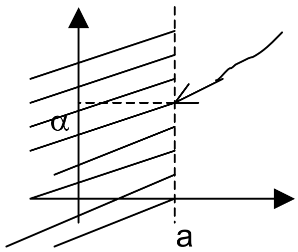
INTRODUCCIÓN: La idea de una función "continua en a" es aquella en la cual $\exists$ f(a) y no presenta "saltos" en a.
Ejemplos:



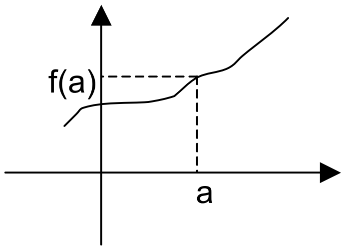


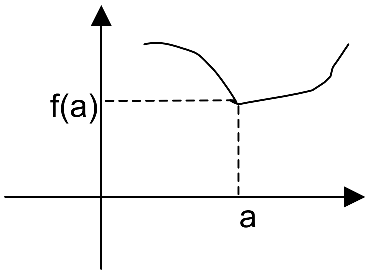






En todos estos casos la **función no es continua (discontinua) en a**





En estos últimos casos la función es continua en a.

DEFINICIÓN:

f es continua en a $\longleftrightarrow$ **1)** $\exists$ **f(a)**
2) $\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = f(a)$

Lo anterior puede expresarse de forma más breve:

$\updownarrow$

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Observación : La definición de continuidad requiere la existencia de f(a), por lo tanto el conjunto de reales para los cuales f es continua
"el conjunto de continuidad" está incluido en el dominio de f.

EJEMPLOS:

1) Si f es una función polinómica $\longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \longrightarrow$ f cont.en a$\forall a\in\Re$

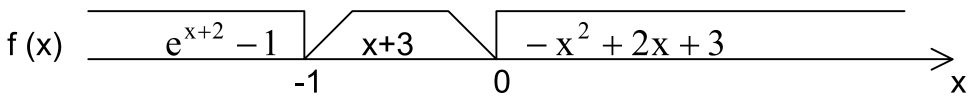
por tanto una función polinómica es continua $\forall x\in\Re$, coincidiendo en este caso con el dominio.

2) Sea f : $f(x) = \sqrt{x}$ $D(f)=\Re^{+}\cup\{0\}$. Estudiaremos la continuidad de f :

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } a>0 \to \lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \xrightarrow{\text{por def.cont.}} \text{f cont. en a} \\ \text{si } a=0 \to \nexists \lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} \quad \big(\nexists \lim\limits_{x\to a^-} \sqrt{x}\,\big) \to \text{f no es cont. en } 0 \\ \text{si } a<0 \to \nexists\, f(a) \to \text{f no es cont. en a} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{f cont. } \forall x\in\Re^{+}$$

En este caso el conjunto de continuidad ha perdido el 0 respecto al dominio.

3) Sea f : f (x) = $\begin{cases} e^{x+2}-1 & \text{si } x\le -1 \\ x+3 & \text{si } -1<x<0 \\ -x^2+2x+3 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$ a) Estudiar cont. de f en –1 y en 0. b) Graficar f.

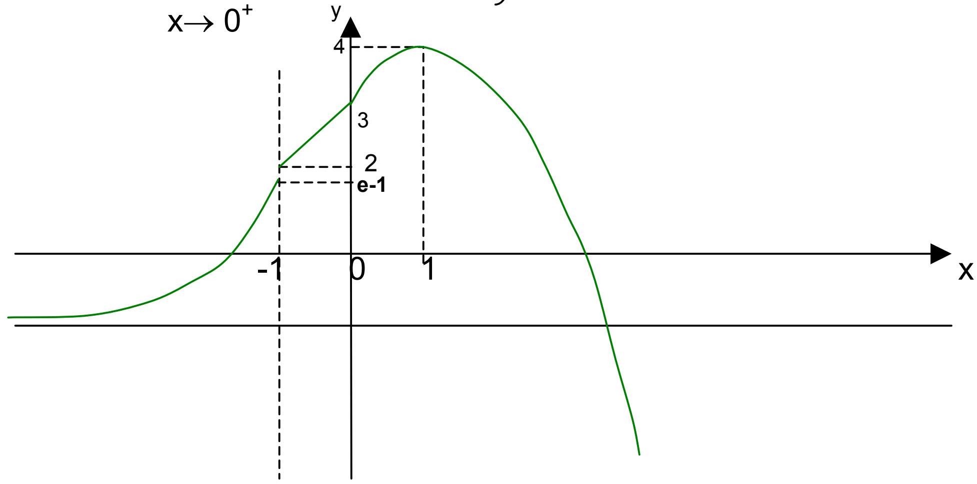


cont. en –1 :

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = e^{-1+2}-1 = e-1 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} (e^{x+2}-1) = e-1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} (x+3) = 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{por def.cont.}} \text{f no cont. en -1}$$

cont. en 0 :

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -0^2+2.0+3 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} (x+3) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (-x^2+2x+3) = 3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{por def.cont.}} \text{f cont. en 0}$$



EJERCICIO1: Estudiar la continuidad de las siguientes funciones :

a) f : f(x)= e^x b) f : f(x)= Lx c) f : f(x)= $|x|$

d) f : f (x) = sg(x). Puede definirse sg(0) de modo que f sea cont. en o ?

EJERCICIO2:

$$\text{Sea } f : f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{si } x \le -1 \\ L|x| - 3 & \text{si } -1<x<0 \\ \sqrt{x}-2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

a) Estudiar cont. de f en -2, –1 y en 0.

b) Graficar f.

¿Podría hacerse f continua en –2 si definiéramos f(-2)?

CONTINUIDAD LATERAL:

Def : f es cont. en $a^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

f es cont. en $a^- \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

Observación: De acuerdo a esta definición :

> f es cont. en a $\Leftrightarrow$ f es cont. en a^- y f es cont. en a^+

CONTINUIDAD EN INTERVALOS :

Definiciones:

1) f es continua en (a,b) $\Leftrightarrow$ f es continua $\forall x \in (a,b)$
2) f es continua en [a,b] $\Leftrightarrow$ f es continua $\forall x \in (a,b)$,
   f es cont. en a^+
   y f es cont. en b^-

EJERCICIO3: Considerando la función del ejercicio 2, analiza continuidades laterales de ésta en 0. ¿es f continua en (-1,0)?¿en [-1,0]?¿y en [-1/2,0]? Justifique respuestas.

OPERACIONES CON FUNCIONES CONTINUAS :

TEOREMAS DE CONTINUIDAD DE SUMA,PRODUCTO Y COCIENTE :

1) Si f es continua en a y g es cont. en a $\Rightarrow$ f+g es cont. en a
2) Si f es continua en a y g es cont. en a $\Rightarrow$ f.g es cont. en a
3) Si f es continua en a, g es cont. en a y **g(a)≠0** $\Rightarrow$ f /g es cont. en a

Demostraremos 1) y los demás quedan a cargo del lector :

$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \lim_{x\to a} \underbrace{f(x)}_{f(a)} + \underbrace{g(x)}_{g(a)} \underset{\text{por teo.lím.suma}}{=} f(a) + g(a) = (f+g)(a)$$

g(a) por H y def. cont.

Demostración de 1): $\lim (f+g)(x) \overset{\text{def. función suma}}{=} \lim\ f(x) + g(x) \overset{\text{teo.lím.suma}}{=} f(a)+g(a) = (f+g)(a) \xrightarrow{\text{def.cont.}} (f+g)$ cont. en a

f(a) g(a) (por H y def. cont.)

EJERCICIO4: Demostrar 2)y3) (teos.cont.producto y cociente)

EJEMPLO: Estudiaremos la continuidad de la función: f:f(x)= $\dfrac{\sqrt{x+3}}{(x-7).L(x-5)}$

1) $\sqrt{x+3}$ es **continua $\forall$x > - 3** (continuidad de la función radical)

(continuidad del numerador)

2) x-7 cont.$\forall x \in \Re$ (cont.func.polinómica)
L(x-5) es cont.$\forall$x > 5 (cont. func. logarítmica) $\Big\} \xrightarrow{\text{cont.del producto}}$ (x-2)L(x-2) **cont.$\forall$x > 5**

(continuidad del denominador)

3) (x-7).L(x-5)$\neq$0 $\Leftrightarrow$ x$\neq$7 y x$\neq$6
(denominador no nulo)

$\xrightarrow{\text{de 1),2) y 3) y por teo.cont.cociente}}$ $\boxed{\textbf{f es continua } \forall x > 5, \textbf{ con } x\neq 6 \textbf{ y } x\neq 7}$

EJERCICIO5: Estudiar continuidad de la función f : f(x)= $\dfrac{x^2-5x}{(e^{x+2}-3)(L|x+2|)}$

CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN COMPUESTA:

Si f es cont. en a
g es cont. en f(a) $\Big\} \Rightarrow$ (g o f) cont. en a

Demostración: $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = \lim\limits_{x\to a} g[f(x)] = g[f(a)] = (g \circ f)(a) \Rightarrow$ gof cont. en a
(por cont.de g en f(a))

f(a) por cont. de f en a (H).

Ejemplo : Sea f : f(x) = L(x^2-1)

x^2-1 cont.$\forall x \in \Re$ (cont.func.polinómica)
u= x^2-1>0 $\forall x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$
Lu es cont.$\forall$u > 0 (cont. func. logarítmica)

cont. función compuesta

f cont. $\forall x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

TEOREMAS DE CONTINUIDAD:

TEOREMA DE BOLZANO:

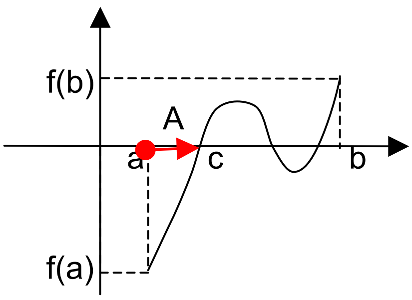
H f cont. en [a,b] , f(a).f(b)<0	T $\exists c \in (a,b)$ / f(c)=0

Demostración :

Obs: El teorema **no asegura la unicidad de la raíz en (a,b)**

A efectos de la demostración supondremos f(a)<0 y f(b)>0

Consideramos un conjunto auxiliar : **A=** $\{x \in [a,b] \ / \ f(x)<0\}$



La demostración consiste en ver que dicho conjunto tiene extremo superior y que éste es raíz de f en (a,b).

* $A \subset \Re$ y $A \neq \emptyset$ pues $a \in A$ (def.A)
* A está acotado superiormente por b (def.A)

$\downarrow$ por axioma de continuidad.

$\boxed{\exists \mathbf{c} = \overline{\text{ext}}(A)}$, al ser a y b cotas inf. y sup. respect.de A $\rightarrow$ **a** $\leq$ **c** $\leq$ **b**. (más adelante veremos que $c \neq a$ y $c \neq b$)

$\downarrow$ al ser f cont. en [a,b] por H

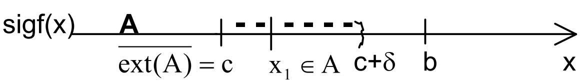
$\boxed{\exists \mathbf{f(c)} \in \Re}$ Probaremos que f(c)=0,suponiendo por absurdo f(c)<0 o f(c)>0

1) **Supongamos f(c)<0.** Si así fuera $c \neq b \xrightarrow{\text{por Hip.}}$ f es cont. en c^+ $\xrightarrow{\text{def.cont.}} \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c) < 0 \xrightarrow{\text{teo.cons.signo}} f(x)<0 \ \forall x \in E^*_+(c,\delta)$

ABSURDO

Tomando un $x_1 \in E^*_+(c,\delta) \cap [a,b] \xrightarrow{\text{def.A}}$ $\boxed{x_1 \in A, \text{ pero } x_1 > c = \overline{\text{ext}}(A)}$ lo cual es absurdo por def. de $\overline{\text{ext}}$.

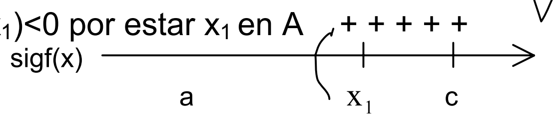
$\rightarrow$ f(c)$\not<$0 y por tanto $c \neq a$.



2) **Supongamos f(c)>0.** Si así fuera $c \neq a \xrightarrow{\text{por Hip.}}$ f es cont. en c^- $\xrightarrow{\text{def.cont.}} \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f(c) > 0 \xrightarrow{\text{teo.cons.signo}} f(x)>0 \ \forall x \in E^*_-(c,\delta)$

$\xrightarrow{\text{prop.}\overline{\text{ext}}} \exists \ x_1 \in E^*_-(c,\delta) \cap A \ \rightarrow f(x_1)>0$ por estar x_1 en el semientorno
f(x_1)<0 por estar x_1 en A

ABS.



$\rightarrow$ f(c)$\not>$0 y por tanto $c \neq b$.

$\xrightarrow{\text{por 1 y 2}}$ $\boxed{\mathbf{f(c)=o \ con \ c \in (a,b)}}$

EJEMPLO: Sea f : f(x) = L| x-2| -x

Demostrar que f tiene al menos una raíz en (0,1)

Aplicaremos el teorema de Bolzano:

1) f(0)= L2>0 , f(1)= -1<0

2) $\left.\begin{array}{l} L|x-2| \text{ cont. } \forall x \neq 2 \text{ (cont. función log.)} \\ -x \text{ cont. } \forall x \in \Re \text{ (cont. función polin.)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{teo.cont.suma}}$ f cont. .$\forall x \in \Re$, x $\neq 2$ $\downarrow$ f cont. en [0,1]

$\xrightarrow{\text{de 1) y 2) por teo.de Bolzano}} \exists c \in (0,1)$ / f(c)=0

EJERCICIO6:
Demostrar que f : f(x) = $e^{x-3} + x^2 - 16$
tiene al menos una raíz en el intervalo (3,4)

TEOREMA DE DARBOUX (aplicación de Bolzano)

H f cont. en [a,b]
f(a)<k<f(b), k$\in\Re$

T $\exists c \in (a,b)$ / f(c)=k

Demostración:

Tomaremos una función auxiliar g : g(x) = f(x) – k

$\left.\begin{array}{l} \text{f cont. en [a,b] por H} \\ \text{-k cont. en [a,b] (cont.función cte.)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{cont.func.suma}}$ g cont. en [a,b]

g(a) = f(a) – k < 0 por H
g(b) = f(b) – k >0 por H

$\xrightarrow{\text{por teo.de Bolzano}} \exists c \in (a,b)$ / g(c)=0 $\rightarrow$ f(c) – k = 0 $\rightarrow$ f(c) = k