Sucesiones

Temas: Límites de sucesiones. Sucesiones monótonas y sus límites.
Pares de sucesiones monótonas convergentes. Número e.
Operaciones con sucesiones y cálculo de sus límites.
Sucesiones equivalentes. Ordenes de infinitos e infinitésimos.

Sucesiones: definición.
Una sucesión de números reales es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y cuyo recorrido está contenido en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ $\quad f(n)=n^2-3$ En forma abreviada $f_n=n^2-3$ o también $a_n=n^2-3$
$g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ $\quad g(n)=\sqrt{n-4}$, o $g_n=\sqrt{n-4}$ En este caso la sucesión empieza en n=4 porque en 0, 1 , 2 y 3 no existe.

Debemos distinguir :

- ♠ la sucesión ($\mathbf{a_n}$) es la función $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$
- ♠ el término general $\mathbf{a_n}$ que es simplemente un número real, el término n-simo.
- ♠ el recorrido de la sucesión $\{a_n\}$

Diferentes formas de definir las sucesiones.
a) Explicita: se da una fórmula para el término general, tal cual ya lo vimos más arriba.
b) Recurrencia: se da el primer término y un método general que permita calcular los demás a partir del anterior o anteriores.

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = 2.a_n + 1 \end{cases}$$

Los primeros términos son, entonces, 3, 7, 15, 31, ...

c) Dando una lista o una propiedad.
A veces no es posible o no existe una fórmula y ni siquiera una relación de recurrencia.
Por ejemplo, la sucesión de los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...
Otro ejemplo: la sucesión de resultados al tirar un dado por una persona en un momento determinado : 3, 2, 6, 1, 1, 6, 1, 6, 5, 1, 1, 1, 5, 4, ...

A veces a las sucesiones definidas por recurrencia se le puede encontrar la "fórmula" del término general. ¡A veces ! Lo veremos en el práctico.

Sucesiones monótonas
Una sucesión ($\mathbf{a_n}$) es creciente si a partir de un cierto $\mathbf{n_0}$, número natural, se cumple que cada término es mayor o igual que el anterior.
En símbolos, ($\mathbf{a_n}$) es creciente si $\forall n\in\mathbb{N},\quad n>n_0,\quad a_n\le a_{n+1}$
Será estrictamente creciente si es mayor que el anterior.
($\mathbf{a_n}$) es estríctamente creciente si $\forall n\in\mathbb{N},\quad n>n_0,\quad a_n< a_{n+1}$

Analogamente, ($\mathbf{a_n}$) es decreciente si $\forall n\in\mathbb{N},\quad n>n_0,\quad a_n\ge a_{n+1}$

(**a_n**) es estríctamente decreciente si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_0, \quad a_n > a_{n+1}$.
Una sucesión es monótona si es creciente o decreciente.

Sucesiones periódicas
Una sucesión es periódica de período $p,\ p \in \mathbb{N}^*$ si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+p} = a_n$ con p el menor posible.
(Si tiene período 3 no diremos que tiene período 6).
Cuando p = 1 diremos que la sucesión es constante.

Ejemplo: la sucesión (**a_n**) definida por $a_n = (-1)^n$ es periódica de período 2.

Sucesiones acotadas.

Una sucesión (**a_n**) está acotada superiormente si existe $K \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \le K$.
Una sucesión (**a_n**) está acotada inferiormente si existe $H \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \ge H$.
Una sucesión (**a_n**) está acotada si está acotada superior e inferiormente.
O sea que (**a_n**) está acotada si existen $H \in \mathbb{R},\ K \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ H \le a_n \le K$.

Pares de sucesiones monótonas convergentes PSMC

Las sucesiones $(\mathrm{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(\mathrm{b}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se dice que forman un PSMC si cumplen:

$$\text{PSMC} \begin{cases} (\mathrm{a}_n) \textit{ es creciente } y \ (\mathrm{b}_n) \textit{ es decreciente} \\ \forall n \in \mathbb{N} \textit{ se tiene que } \mathrm{a}_n \le \mathrm{b}_n \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \textit{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tal que } \mathrm{b}_{n_0} - \mathrm{a}_{n_0} < \varepsilon \end{cases}$$

Cuando 2 sucesiones forman un PSMC definen un único número real j, llamado elemento de separación del PSMC, que es el supremo de $\{a_n\}$ y el ínfimo de $\{b_n\}$.
Se cumple entonces que $\mathrm{a}_n \le j \le \mathrm{b}_n$.

Ejercicios:
1) Muestra que las sucesiones siguientes, definidas por su término general, son periódicas y determina el período de cada una.

$$a_n = \cos(\frac{2n\pi}{5}) \qquad b_n = sen(\frac{n\pi}{3}) \qquad c_n = \cos(\frac{(4n-1)\pi}{6}) \qquad \begin{cases} d_0 = 2 \\ d_{n+1} = \dfrac{3}{d_n} \end{cases}$$

2) Estudia la monotonía de las sucesiones siguientes, definidas por su término general.

$$f_n = 2n - \frac{7}{n} \qquad g_n = 2 - \frac{7}{5^n} \qquad \begin{cases} h_0 = 2 \\ h_{n+1} = \dfrac{1}{h_n^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} i_0 = -2 \\ i_{n+1} = 2i_n^2 + 3i_n - 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} j_0 = -1 \\ j_{n+1} = 2j_n^2 + 3j_n - 4 \end{cases}$$

3) Una sucesión aritmética tiene como sexto término 7 y como decimosegundo término 37. Calcula el término número 100 y la suma de los primeros 1000 términos.
Una sucesión aritmética es aquella que verifica $a_{n+1} = d + a_n \;\; con \;\; d \in \mathbb{R}$.

4) Calcula 91+94+97+100+..........+547

5) Determina el segundo término de una progresión geométrica si se sabe que el sexto término es 4 y el tercer término es $-\frac{4}{27}$. Una sucesión geomética es la que verifica $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathrm{r} \;\; con \;\; \mathrm{r} \in \mathbb{R}$.

6) Calcula $\frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - .... + \frac{1}{59049}$

7) Sea la sucesión $(\mathbf{a_n})$ definida por $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2 + a_n^2} \end{cases}$

i) Muestra que $\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ a_n \;\; y \;\; a_{n+1}$ son del mismo signo. Deduce que $\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$

ii) Estudia la monotonía de la sucesión $(\mathbf{a_n})$.

8) Estudia la acotación de las siguientes sucesiones definidas por sus términos generales:

$$a_n = 2 - \frac{7}{n} \qquad b_n = 2 - \cos(n) \qquad c_n = \frac{6n-7}{3n+1} \qquad d_n = \left|n - n^2\right|$$

9) Si $a_n = \dfrac{sen(n) + (-1)^n . \cos(n)}{3n+2}$, muestra que $\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ \left|a_n\right| \leq \dfrac{2}{3n}$

10) Sea la sucesión $(\mathbf{q_n})$ definida por $\begin{cases} \mathrm{q}_0 = 0 \\ q_{n+1} = \sqrt{6 + q_n} \end{cases}$

a) Prueba que la sucesión es estrictamente creciente y acotada superiomente por 3.

b) Prueba que $\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ 3 - q_{n+1} \leq \dfrac{3 - q_n}{3}$

11) Prueba que $a_n = \dfrac{n-1}{3n} \quad b_n = \dfrac{n}{3n-2}$ son un PSMC y halla $a \in a_n \;\; y \;\; b \in b_n \;\; / \;\; b - a < 0{,}001$.

12) Dadas las siguientes sucesiones por sus términos generales, demuestra que a_{2n} y a_{2n+1} forman un PSMC. Calcula el número real que definen.

i) $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

ii) $a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i}$

iii) $a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n} \;\; con \;\; a_0 = 2$

iv) $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n} \;\; con \;\; a_0 = 1$

Conjugada: Demostrar que $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ Investigar: $\sqrt[5]{a}-\sqrt[5]{b}=$..........

Límite de una sucesión

Definición: Una sucesión ($\mathbf{a_n}$) tiene límite b si, cualquiera sea el número real positivo ε, existe un número natural n_0 tal que para cualquier número natural mayor que ese, la diferencia entre el término n-simo de la sucesión y el valor del límite es tan chica como se quiera.

En resumen, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = b \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \textit{existe}\ n_0 \in \mathbb{N} \ \textit{tal que si}\ n > n_0,\ \textit{entonces}\ |a_n - b| < \varepsilon}$

Cuando una sucesión tiene límite, se dice que converge a dicho límite.
Teorema 1: Si una sucesión tiene límite, éste es único.
Teorema 2: Una sucesión convergente está acotada. (Cuidado que el recíproco no se cumple)
Teorema 3: El límite de una suma de sucesiones es la suma de los límites

Teorema 4: Si una sucesión tiene límite $b \neq 0$, entonces $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, si\ n > n_0 \Rightarrow 0 < \dfrac{|b|}{2} < |b_n|$

Teorema 5: Si $\text{lím}\ a_n = b,\ b \neq 0,\ \Rightarrow \text{lím}\ \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{b}$

Definición: La sucesión ($\mathbf{a_n}$) diverge a $+\infty$ si $\forall H,\ H \in \mathbb{R}^+\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n > n_0 \Rightarrow a_n > H$

Teorema 6: Si $\text{lím}\ a_n = +\infty,\ \Rightarrow \text{lím}\ \dfrac{1}{a_n} = 0$

Teorema 7: Límite de la sucesión comprendida.
Si $a_n \le b_n \le c_n\ \forall n,\ n \in \mathbb{N},\ n > n_0$ y $\text{lím}\ a_n = \text{lím}\ c_n \Rightarrow \text{lím}\ a_n = \text{lím}\ b_n = \text{lím}\ c_n$

Teorema 9: $\text{lím}\ a_n = m \Rightarrow \text{lím}\ |a_n| = |m|$ (Cuidado que el recíproco no se cumple)
Teorema 10: Si una sucesión es monótona entonces tiene límite.
Teorema 11: Toda subsucesión de una sucesión convergente, converge al mismo límite.

Sucesiones equivalentes

Definición: Se dice que dos sucesiones ($\mathbf{a_n}$) y ($\mathbf{b_n}$) son equivalentes si $\text{lím}\ \dfrac{a_n}{b_n} = 1$

Notación: lo anotaremos ($\mathbf{a_n}$) ~ ($\mathbf{b_n}$) .

INFINITÉSIMOS Definición: ($\mathbf{a_n}$) es un infinitésimo si y sólo si $\text{lím}\ a_n = 0$

Límites equivalentes

1) Si $\text{lím}\ a_n = 0 \Rightarrow \text{lím}\dfrac{L(1+a_n)}{a_n} = 1$ Entonces $L(1+a_n) \sim a_n$ sólo cuando $a_n \to 0$

2) Si $\text{lím}\ z_n = 1 \Rightarrow \text{lím}\dfrac{L(z_n)}{z_n - 1} = 1$ Entonces $L(z_n) \sim (z_n - 1)$ sólo cuando $z_n \to 1$

3) Si $\lim a_n = 0 \Rightarrow \lim \dfrac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$ Entonces $e^{a_n}-1 \sim a_n$ sólo cuando $a_n \to 0$

4) Si $\lim z_n = 1 \Rightarrow \lim \dfrac{{z_n}^p - 1}{p(z_n-1)} = 1$ Entonces ${z_n}^p - 1 \sim p(z_n-1)$ sólo sí $a_n \to 1$

5) Si $\lim a_n = 0 \Rightarrow \lim \dfrac{\operatorname{sen}(a_n)}{a_n} = 1$ Entonces $\operatorname{sen}(a_n) \sim a_n$ sólo cuando $a_n \to 0$

Infinitos

Definición: $(\mathbf{a_n})$ es un infinito si y sólo si $\lim a_n = \infty$

Ordenes de infinitos:

$orden\ La_n$ <	$orden\ {a_n}^p$ <	$orden\ b^{a_n}$ <	$orden\ {d_n}^{k.a_n}$
	$p > 0$	$b > 1$	$k > 0$
logarítmico	potencial	exponencial	potencial-exponencial

Si $(\mathbf{a_n})$ y (b_n) son dos infinitos, se los puede comparar haciendo el cociente entre ellos:

$$\text{Si} \quad \lim \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \textit{el orden de } b_n \textit{ es mayor que el de } a_n \\ \infty & \textit{el orden de } a_n \textit{ es mayor que el de } b_n \\ k,\ k \neq 0 & \textit{el orden de } b_n \textit{ es igual al de } a_n \\ \nexists & \textit{los infinitos no son comparables.} \end{cases}$$

(¡Cuidado que es diferente si fueran infinitésimos!)

EJERCICIOS

13) Calcula los límites de las siguientes sucesiones (se sobreentiende que $n \to +\infty$):

a) $\lim \dfrac{6n^2+7n-4}{3n^2-2n+\pi}$ b) $\lim \dfrac{6n^3+7n-4}{3n^4-2n+\pi}$ c) $\lim \dfrac{6n^2+7n^3-4}{2n-3n^2+\pi}$

d) $\lim \sqrt{n^2-3n} - \sqrt{n^2+4n}$ e) $lím\ \cos(n\pi)$ f) $lím\ \dfrac{\cos(n^4\pi)}{n + sen(n^3-2n+\pi)}$

14) Sea $(\mathbf{a_n})$ la sucesión definida por: $a_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \ldots\ldots + \dfrac{n}{n^2+n}$

¿Cuál es el menor término de dicha suma?

Deduce que para todo $n > 0$ se tiene: $\dfrac{n^2}{n^2+n} \le a_n \le \dfrac{n^2}{n^2+1}$ ¿Cuál es el limite de la sucesión $(\mathbf{a_n})$?

15) Sea $(\mathbf{a_n})$ la sucesión definida por : $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt{2+3.a_n} \end{cases}$ i) Probar que $(\mathbf{a_n})$ es creciente.

ii) Probar por recurrencia que $(\mathbf{a_n})$ está acotada superiormente por 4. iii) Calcular el límite de $(\mathbf{a_n})$.

16) Calcular los siguientes límites: a) $\lim\limits_{x_n \to 0} \dfrac{(1+x_n)(1+2.x_n)(1+3.x_n)-1}{x_n}$ b) $\lim\limits_{x_n \to 3} \dfrac{x_n^{\,2}-5x_n+6}{x_n^{\,2}-8x_n+15}$

c) $\lim\limits_{x_n \to 1} \dfrac{x_n^{\,3}-3x_n+2}{x_n^{\,4}-4x_n+3}$ d) $\text{lím} \left(\dfrac{n^2-3}{n^2+2n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n+2}}$ e) $\lim\limits_{x_n \to -\infty} \sqrt[3]{x_n^{\,3}+x_n-2} - x_n$

17) Sea (**a$_n$**) la sucesión definida por : $\begin{cases} a_0 \geq 0 \\ a_{n+1} = \sqrt{12+a_n} \end{cases}$

i) Probar que (**a$_n$**) es creciente si $a_n \leq 4$ y decreciente si $a_n \geq 4$.

ii) Deducir que (**a$_n$**) es convergente.

iii) Calcular el límite de (**a$_n$**).

18) (Primer parcial 2009, ejercicio 5)

Sea la sucesión definida por $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = \dfrac{-1}{2+a_{n-1}} \end{cases}$

i) Calcular los primeros términos y deducir de ello a_n en función de n.
Probarlo por Inducción Completa.

ii) Probar que $\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$ se cumple que $-1 < a_n < 0$

iii) Investigar la monotonía de la sucesión y deducir si tiene o no límite.
En caso afirmativo, calcularlo.

19) (Examen 18/12/2009, ejercicio 4)
En este triángulo se han dispuesto números naturales:

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15
....

a) ¿Cuánto es la suma de todos los números que ocupan la fila 25 de este triángulo?

b) Implementar una función en Haskel que nos devuelva, al ingresarle el número de fila, una lista con los elementos de la fila. Por ejemplo, fila 5 = [11,12,13,14,15]

b') Indicar las sucesiones P_n y U_n que devuelven el primer y el último término de la fila n-sima.
Por ejemplo $P_5=11$ $U_5=15$