Derivabilidad

Definición: Cociente incremental.
Sea f una función real y $[a,b]$ un intervalo en el cual f está definida. Llamamos cociente incremental de f en $[a,b]$ al cociente: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ o $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Interpretación geométrica: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\tan\alpha$. Es la pendiente de la recta secante al gráfico de f en los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ (Representa gráficamente)

Definición: Derivada en un punto

Sea $f: I \to R$, a un punto interior de I. Decimos que f es derivable en $x=a \Leftrightarrow$ existe el límite del cociente incremental cuando $\Delta x \to 0$ y es finito.

Es decir: $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ Existe y es un número real. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ y $f'(a)\in R$

Definición: Recta tangente

Sea f es derivable en $x=a$, llamamos recta tangente al gráfico de f en $x=a$, a la recta de ecuación: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ o $y=f(a)+f'(a)(x-a)$

Teorema:
H) f es derivable en $x=a$
T) f es continua en $x=a$

Demostración:
Entonces $\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \Rightarrow f(x)\, es\ continua\ en\ x=a$

¿Se cumple el recíproco?

Definición: Función derivada. Consideramos la función que asocia a cada punto x, el valor de la derivada en ese punto. $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Álgebra de derivadas:

Derivada de una suma:
H) $f\ es\ derivable\ en\ x=a$
$g\ es\ derivable\ en\ x=a$
T) $(f+g)\,es\ derivable\ en\ x=a$ y además $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$

Derivada del producto con una constante:

H) f *es derivable en* $x = a, \quad k \in R$

T) $(k \cdot f)$ *es derivable en* $x = a$ y además $(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$

Derivada del producto de funciones:

H) f *es derivable en* $x = a$

g *es derivable en* $x = a$

T) $(f \cdot g)$ *es derivable en* $x = a$ y además $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

Derivada de la función $\dfrac{1}{f}$

H) f *es derivable en* $x = a,\ f(a) \neq 0$

T) $\left(\dfrac{1}{f}\right)$ *es derivable en* $x = a$ *y* $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(a) = -\dfrac{f'(a)}{f^2(a)}$

Derivada del cociente de funciones:

H) f *es derivable en* $x = a$

g *es derivable en* $x = a,\ g(a) \neq 0$

T) $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ *es derivable en* $x = a$ y además $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$

Derivada de la función compuesta (regla de la cadena):

H) f *es derivable en* $x = a$

g *es derivable en* $f(a)$

$\exists\, (g \circ f)$

T) $(g \circ f)$ *es derivable en* $x = a$ y además $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Definiciones:

- $f : X \to R,\ a \in IntX$

  $$f \ \textit{estrictamente creciente en } "a" \Leftrightarrow \exists E(a) / \forall x \in E(a), \begin{cases} x < a, & f(x) < f(a) \\ x > a, & f(x) > f(a) \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \forall x \in E^*(a),\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

- $f : X \to R,\ a \in IntX$

  $$f \ \textit{estrictamente decreciente en } "a" \Leftrightarrow \exists E(a) / \forall x \in E(a), \begin{cases} x < a, & f(x) > f(a) \\ x > a, & f(x) < f(a) \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \forall x \in E^*(a),\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$

- Decimos que $f : X \to R,\ a \in IntX$ presenta un máximo relativo en "a" $\Leftrightarrow \exists E(a)$ tal que $\forall x \in E(a),\ \ f(x) \leq f(a)$

- Decimos que $f : X \to R,\ a \in IntX$ presenta un mínimo relativo en "a" $\Leftrightarrow \exists E(a)$ tal que $\forall x \in E(a),\ \ f(x) \geq f(a)$

Teorema: Condición suficiente de crecimiento.

H) $f\ es\ derivable\ en\ x=a$
$f'(a)>0$
T) $f\ \ es\ estrictamente\ creciente\ en\ x=a$

Demostración:

Como $f\ es\ derivable\ en\ x=a$ entonces $\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)>0 \Rightarrow$(por teorema de conservación del signo) $\exists E(a)/\ \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} si\ x\in E^{+}(a)\Rightarrow \underline{x>a}\Rightarrow x-a>0\Rightarrow f(x)-f(a)>0\Rightarrow \underline{\underline{f(x)>f(a)}} \\ si\ x\in E^{-}(a)\Rightarrow \underline{x<a}\Rightarrow x-a<0\Rightarrow f(x)-f(a)<0\Rightarrow \underline{\underline{f(x)<f(a)}} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$f\ \ es\ estrictamente\ creciente\ en\ x=a$$

Observación: El recíproco NO se cumple.

Teorema: Condición necesaria de extremo relativo. (Teorema de Fermat)

H) $f\ es\ derivable\ en\ x=a$
$f\ \ presenta\ un\ extremo\ relativo\ en\ x=a$
T) $f'(a)=0$

Demostración: (por absurdo)

Si fuera
$f'(a)>0\Rightarrow f\ \ crece\ estrictamente\ en\ x=a\Rightarrow f\ no\ tendría\ extremo\ en\ x=a\,(Aburdo: contradice\ la\ H)$
$f'(a)<0\Rightarrow f\ \ decrece\ estrictamente\ en\ x=a\Rightarrow f\ no\ tendría\ extremo\ en\ x=a\,(Aburdo: contradice\ la\ H)$

$\Rightarrow f'(a)=0$

Observación: la condición no es suficiente. $f(x)=x^{3}\ es\ derivable\ en\ x=0\ y\ \ f'(0)=0$
sin *emb*arg*o no tiene extremo en* $x=0$

Teorema de Rolle:
H) $f\ es\ continua\ en\ [a,b]$
$f\ es\ derivable\ en\ (a,b)$
$f(a)=f(b)$
T) $\exists c\in(a,b)/\ f'(c)=0$

Demostración: f *es continua en* $[a,b]$ entonces (por Weierstrass) $f([a,b])$ tiene máximo y mínimo en el intervalo. Consideramos tres casos:

1) $M = m \Rightarrow f \text{ es constante} \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

2) $M \neq m$ *pero uno de ellos dos igual a* $f(a) = f(b)$

Supongamos $M = f(a) = f(b) \Rightarrow (\text{por teorema Darboux}) \Rightarrow \exists c \in (a,b) / f(c) = m$

$$\left.\begin{array}{l} m = f(c) \text{ mínimo absoluto y } c \in (a,b) \\ \text{y como } f \text{ es derivable} \end{array}\right\} \Rightarrow (\text{Fermat}) \ f'(c) = 0$$

3) $f(a) \neq M \neq m$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists c_1 \in (a,b) / f(c_1) = M \Rightarrow f'(c_1) = 0 \\ \exists c_2 \in (a,b) / f(c_2) = m \Rightarrow f'(c_2) = 0 \end{cases}$$

Teorema del valor medio (Lagrange):

H) f *es continua en* $[a,b]$

f *es derivable en* (a,b)

T) $\exists c \in (a,b) / f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ (esto significa que existe un punto cuya tangente tiene la misma pendiente que la recta pasa por los puntos $(a, f(a))$ *y* $(b, f(b))$)

Demostración:
Consideramos una función auxiliar $\varphi : [a,b] \to R / \varphi(x) = f(x) - hx$, *con h de* modo *que* $\varphi(a) = \varphi(b)$

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow f(a) - ha = f(b) - hb \Leftrightarrow f(a) - f(b) = h(a-b) \Leftrightarrow h = \frac{f(a) - f(b)}{a-b}$$

Esta función φ verifica las hipótesis del teorema de Rolle

$$\Rightarrow \exists c \in (a,b) / \varphi'(c) = 0 \ y \ \varphi'(c) = f'(c) - h = 0 \Leftrightarrow h = f'(c) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a-b}$$

Derivada primera:
El estudio del signo de la derivada primera de una función $(f'(x))$ nos permite determinar:

- ✓ Los intervalos de crecimiento (decrecimiento)
- ✓ Las abscisas de los extremos relativos. (Donde *f* es continua y *f'* cambia de signo)
- ✓ Las abscisas de los puntos singulares (*f* es continua en *a*, pero no derivable)
- ✓ Las tangentes y semitangentes en los puntos que corresponda.