VALOR ABSOLUTO- PROPIEDADES Y FUNCIONES

CURSO 6to Prof : Sergio Weinberger 2007

DEF: Si $x \in R \Rightarrow |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

EJERCICIO: Indicar en cada proposición si es verdadera o falsa, justificando de acuerdo a la def. en caso V y dando un contraejemplo en caso F.

a) $|3-\sqrt{5}| = 3-\sqrt{5}$ b) $|1-\sqrt{2}| = 1-\sqrt{2}$ c) si $x \in R \Rightarrow |-x| = x$

d) si $x \in R \Rightarrow |3x+5| = 3x+5$ e) si $x \in R, x > 2 \Rightarrow |-2x+3| = 2x-3$

PROPIEDADES:

1) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in R$

2) $|x| = |-x| \quad \forall x \in R$

3) $|x| = 0 \Leftrightarrow x=0$

4) $|x.y| = |x|.|y| \quad \forall x \in R \forall y \in R$

5) $|x / y| = |x| / |y| \quad \forall x \in R \forall y \in R^*$

6) $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x \in R \forall y \in R$
(propiedad triangular)

7) $|x| = k \Leftrightarrow x = k \text{ o } x = -k$
$(k \in R^+)$

8) $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$
$(k \in R^+)$

9) $|x| > k \Leftrightarrow x < -k \text{ o } x > k$
$(k \in R^+)$

10) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ o } x = -y$

11) $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in R$

Demostración de 4) :

a) si $x > 0, y > 0 \Rightarrow x.y > 0 \overset{\text{def.}||}{\Rightarrow}$ $\left.\begin{array}{l} |x.y| = x.y \\ \overset{\text{def.}||}{} \; |x||y| = x.y \end{array}\right\} \Rightarrow |x.y| = |x|.|y|$

b) si $x>0, y<0 \Rightarrow x.y < 0 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} |x.y| = -x.y \\ |x||y| = x.(-y) = -x.y \end{array}\right\} \Rightarrow |x.y| = |x|.|y|$

c) si $x<0, y<0 \Rightarrow x.y > 0 \overset{\text{def.}||}{\Rightarrow}$ $\left.\begin{array}{l} |x.y| = x.y \\ |x||y| = (-x).(-y) = x.y \end{array}\right\} \Rightarrow |x.y| = |x|.|y|$

d) si x=0 y/o y=0 $\Rightarrow$ la igualdad es obvia.

Demostración de 5) : a cargo del lector.

Demostración de 6) : def.| |

a) si x >0, y > 0 $\Rightarrow$ x+y > 0 $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{r} |x.+y| = x+y \\ |x|+|y| = x+y \end{array}\right\} \Rightarrow |x+y| = |x| + |y|$

b) si x<0, y<0 $\Rightarrow$ x+y < 0 $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{r} |x+y| = -x-y \\ |x|+|y| = (-x)+(-y) = -x-y \end{array}\right\} \Rightarrow |x+y| = |x| + |y|$

c) si x>0, y<O $\Rightarrow$

c1) $x+y \geq 0 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{r} |x+y| \overset{\text{def.}|\,|}{=} x+y \\ |x|+|y| = x-y \\ y<o \Rightarrow -y > o \Rightarrow y< -y \underset{\text{monotonía}}{\Rightarrow} x+y< x-y \end{array}\right\} \Rightarrow |x+y| < |x| + |y|$

c2) $x+y < 0 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{r} |x+y| \overset{\text{def.}|\,|}{=} -x-y \\ |x|+|y| = x-y \\ x>0 \Rightarrow -x < o \Rightarrow -x< x \underset{\text{monotonía}}{\Rightarrow} -x-y< x-y \end{array}\right\} \Rightarrow |x+y| < |x| + |y|$

d) si x=0 y/o y=0 $\Rightarrow$ se cumple la igualdad.

<u>APLICACIONES DE LAS PROPIEDADES 7 A 10:</u>

RESOLVER :

A) $|3x-1| = 2 \overset{\text{prop.7}}{\Leftrightarrow}$
$3x-1= -2 \Rightarrow$ $\boxed{x = -1/3}$
o $3x-1= 2 \Rightarrow$ $\boxed{x = 1}$

B) $|-4x+2| < 1 \overset{\text{prop.8}}{\Leftrightarrow} -1 < -4x+2 < 1 \Leftrightarrow -3 < -4x < -1 \Leftrightarrow \frac{3}{4} > x > \frac{1}{4}$
$\Rightarrow S = (1/4,3/4)$

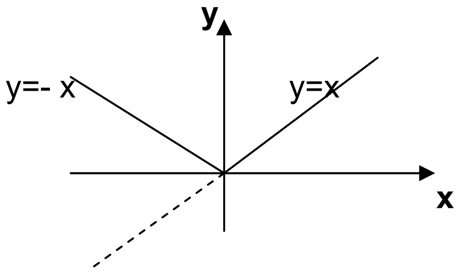
FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

Estudiaremos la función **f : f (x) =│x│**

Raíces o ceros : por prop.2) : única raíz cero

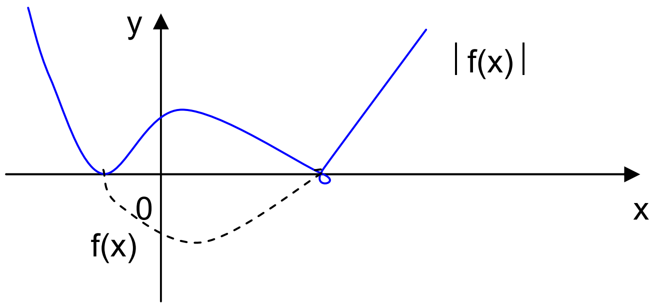
Por prop.1) : sig.│x│ ++++++0++++++++++
0 x

Gráfica . De acuerdo a la def.:



Observación : La gráfica puede obtenerse graficando la función “sin valor absoluto” : g(x)=x, simetrizando la parte de g(x)<0 respecto al eje Ox..

En general, conociendo la gráfica de una función f,
podemos obtener la de│f(x)│ , dejando inmodificada la parte correspondiente a f(x)>0 y simetrizando respecto a Ox la parte correspondiente a f(x)<0.



Ejemplos:

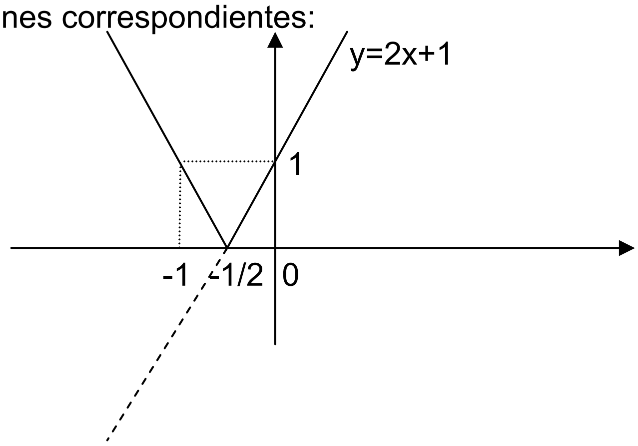
1) $f : f(x) = |2x+1|$

Teniendo en cuenta las propiedades vistas, el signo de f(x) es :

$\mathrm{sig}|2x+1|$ + + + + + + + 0 + + + + + + + +

$-\frac{1}{2}$

Para graficar, con el criterio anterior, graficamos y=2x+1, haciéndole las transformaciones correspondientes:



FUNCIONES DEFINIDAS POR ZONAS

2) $f : f(x) = |x^2 - x| + 2x$

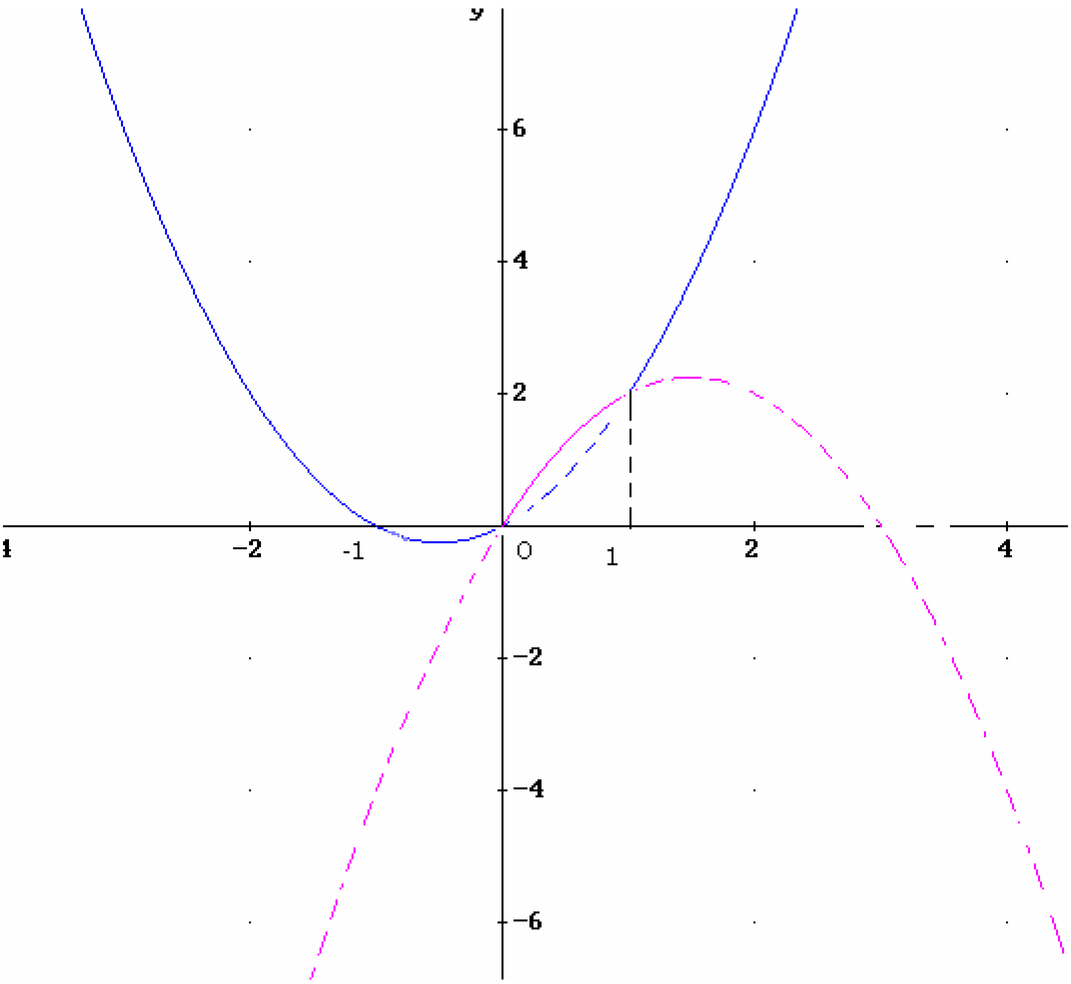
En este caso no podemos aplicar el criterio anterior pues hay expresión fuera del valor absoluto. Se empleará entonces la definición de valor absoluto, para lo cual deberá estudiarse el signo de $x^2 - x$:

sig $(x^2 - x)$ + + + + + + + 0 - - - - - 0 + + + + + + + +

0 1

Esto nos permite expresar f(x) en cada una de las zonas que establece el signo:

$f(x)$ | $x^2 - x + 2x = x^2 + x$ | 0 | $-x^2 + x + 2x = -x^2 + 3x$ | 1 | $x^2 + x$



De acuerdo a la gráfica deducimos :

sig f(x) + + + + + + + 0 - - - - - 0 + + + + + + + + + + + +

-1 0 x