Teórico para el práctico Nº6

CIRCUNFERENCIA

Definición: Dados un punto fijo O y un número real no negativo r, llamamos circunferencia de centro O y radio r, lo notaremos $C_{O,r}$, al lugar geométrico de los puntos del plano que distan r de O.

En símbolos: $C_{O,r} = \{X, X\in\pi \ / \ d(O, X) = r\}$ ó $M \in C_{O,r} \Leftrightarrow d(O, M) = r$

Consecuencia – Definición: a) M es exterior a **¡Error! Imposible crear objetos modificando códigos de campo.** $\Leftrightarrow d(O, M) > r$

b) M es interior a $C_{O,r} \Leftrightarrow d(O, M) < r$

Ecuación de una circunferencia: Sean $O(\alpha, \beta)$ y $r\in R^+ \cup \{0\}$

$$\Rightarrow M \in C_{O,r} \Leftrightarrow d(O,M) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r \Leftrightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0 \xleftrightarrow{ó} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0^{(1)} \text{ donde } \begin{cases} a = -2\alpha \\ b = -2\beta \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \end{cases}$$

Hemos probado que las coordenadas de todos los puntos que pertenecen a una circunferencia verifican una ecuación del tipo (1), pero ... ¿todos los puntos cuyas coordenadas verifican una ecuación del tipo (1), pertenecen a una circunferencia? Investiguemos:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + ax + y^2 + by + c = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \qquad (2)$$

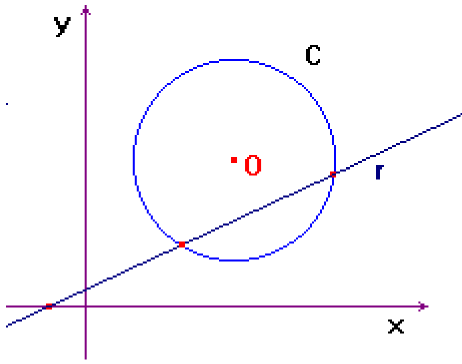
Observando la última ecuación resulta:

- Si $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c < 0$ ➔ No existe ningún punto del plano cuyas coordenadas (x, y) satisfagan la ecuación (2).
- Si $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = 0$ ➔ Existe un solo punto del plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2) y es el punto $T(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$.
- Si $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$ ➔ $\sqrt{\left[x - (-\frac{a}{2})\right]^2 + \left[y - (-\frac{b}{2})\right]^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$

$\Leftrightarrow d(M,R) = r'$ con $M(x, y)$ y $R(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$. O sea que existen infinitos puntos cuyas coordenadas verifican la ecuación (2).

En síntesis: Si $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \geq 0$ la ecuación (1) es la de una circunferencia que recibe el nombre de "real". Si ese número es cero, la ecuación (1) es la ecuación de un punto o la ecuación de una circunferencia de radio nulo.

Intersección de recta y circunferencia



C) $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

r) $a'x + b'y + c' = 0$

Hallar los puntos de intersección, será resolver el sistema formado por las dos ecuaciones.
Suponiendo $b' \neq 0$, "despejamos" y, por ejemplo, de la ecuación de la recta y sustituimos en la ecuación de la circunferencia:

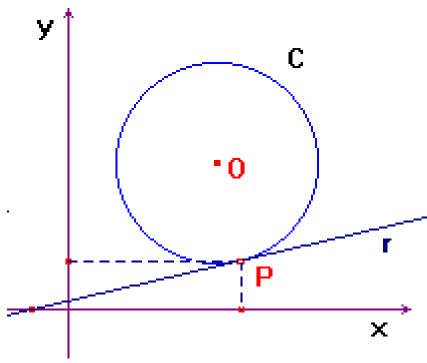
➔ $x^2 + \left(-\dfrac{a'x + c'}{b'}\right)^2 + ax + b\left(-\dfrac{a'x + c'}{b'}\right) + c = 0$ por lo tanto obtenemos una ecuación de segundo grado en "x" que si su discriminante es:

positivo → r es secante a C

nulo → r es tangente a C

negativo → r es exterior a C

TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA



a) Por un punto que pertenece a la circunferencia

Datos: C) $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$P(x_o, y_o) \quad P \in C$

En el caso especial de la circunferencia, se puede hallar la recta perpendicular a la recta OP por P.

➔ C) $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \begin{cases} O\left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2}\right) \\ r^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{4} - c \end{cases}$

➔ $OP) \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -\dfrac{a}{2} & -\dfrac{b}{2} & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow OP) \; -\left(\dfrac{b}{2} + y_0\right)x + \left(\dfrac{a}{2} + x_0\right)y - \dfrac{a}{2}y_0 + \dfrac{b}{2}x_0 = 0$ ➔

$m_{OP} = \dfrac{\dfrac{b}{2} + y_0}{\dfrac{a}{2} + x_0} \quad \rightarrow \quad m_t = -\dfrac{x_0 + \dfrac{a}{2}}{y_0 + \dfrac{b}{2}} \quad t) \; \left(\dfrac{a}{2} + x_o\right)(x - x_o) + \left(\dfrac{b}{2} + y_o\right)(y - y_o) = 0$

Escribamos esta ecuación de forma que podamos recordarla sin mucho esfuerzo:

$$\frac{a}{2}x - \frac{a}{2}x_0 + x_0x - x_0^2 + \frac{b}{2}y - \frac{b}{2}y_0 + y_0y - y_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0x + y_0y + \frac{a}{2}x - \frac{a}{2}x_0 + \frac{b}{2}y - \frac{b}{2}y_0 = x_0^2 + y_0^2$$

pero $P \in C \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0 \Rightarrow ax_0 + by_0 + c = -(x_0^2 + y_0^2)$, por lo tanto, sustituyendo en la ecuación anterior:

t) $x_0x+y_0y+\frac{a}{2}x-\frac{a}{2}x_0+\frac{b}{2}y-\frac{b}{2}y_0+a\quad x_0+by_0+c=0$ $\boxed{t)\ x_0x+y_0y+a(\frac{x+x_0}{2})+b(\frac{y+y_0}{2})+c=0}$

Esta es la ecuación de la recta tangente a una circunferencia en uno de sus puntos y recibe el nombre de "desdoblada" pues se la obtiene, cambiando, en la ecuación de la circunferencia:

$$x^2 \text{ por } x_0x \Updownarrow y^2 \text{ por } y_0y \Updownarrow x \text{ por } \frac{x+x_0}{2} \Updownarrow y \text{ por } \frac{y+y_0}{2}$$

siendo (x_0, y_0) las coordenadas del punto de tangencia.

Ejemplo: Sea C) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$

1. Hallar radio y las coordenadas del centro de la circunferencia.
2. Verificar que P $\in$C, si P (3, –4).
3. Hallar ecuación de la recta t, tangente a C por P. [t) x-y-7=0]

DEFINICIÓN:

Sea C la circunferencia de ecuación C) $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ y P el punto de coordenadas P (x_0, y_0), llamamos polar p del punto P respecto de la circunferencia C, a la recta de ecuación:

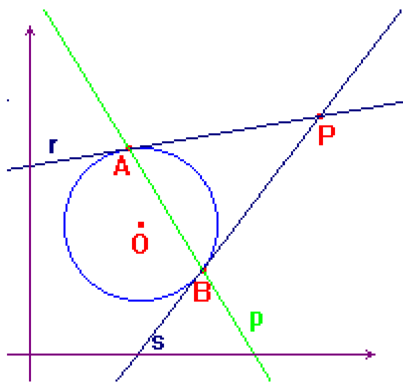
$$p)\quad x_0x+y_0y+a(\frac{x+x_0}{2})+b(\frac{y+y_0}{2})+c=0$$

Observación: P $\in$ C $\Leftrightarrow$ p = t.

Pregunta: Dados en un plano una circunferencia fija C , ¿qué puntos P del plano no tienen polar respecto de C ? Contestemos la pregunta: Los puntos P del plano, cuyas coordenadas hacen que la ecuación de p no sea la ecuación de una recta, son los puntos que no tienen polar respecto de la circunferencia.

$p)\quad x_0x+y_0y+a(\frac{x+x_0}{2})+b(\frac{y+y_0}{2})+c=0 \Leftrightarrow \quad p)\quad (x_0+\frac{a}{2})x+(y_0+\frac{b}{2})y+...=0$ Por lo tanto, la ecuación anterior no es la ecuación de una recta si y solo si $(x_0, y_0)=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$, entonces, el único punto que no tiene polar respecto de una circunferencia es su centro.

b) <u>Por un punto exterior a la circunferencia</u>



Según lo visto:

1. Hallo polar del punto P respecto de la circunferencia.
2. Interseco circunferencia y polar.
3. Las tangentes a la circunferencia pedidas son las determinadas por el punto P y cada uno de los puntos hallados en 2.

DEFINICIÓN:

Sean C) $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ y p) $x_0x + y_0y + a(\frac{x+x_0}{2}) + b(\frac{y+y_0}{2}) + c = 0$,

llamamos polo P de la recta p respecto de la circunferencia C , al punto $P(x_0, y_0)$.

Observación: Si la recta es tangente a la circunferencia, el polo es el punto de tangencia.

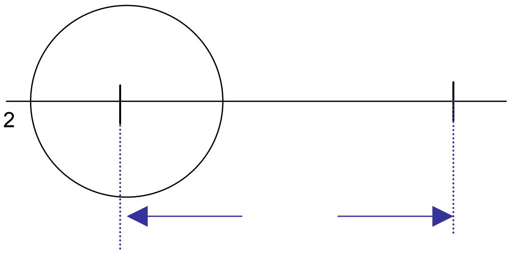
POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO DE UNA CIRCUNFERENCIA

En el curso de Métrica se definió potencia de un punto respecto de una circunferencia dada como:

$$\text{Pot}(P, C) = \overline{PA}\,\overline{PB} = \overline{PA'}\,\overline{PB'} = \overline{PA''}\,\overline{PB''} = \cdots = \overline{PT}^2 = \text{cte.}$$

Se probó que es independiente de la secante considerada y que es igual a la diferencia de los cuadrados de las medidas del segmento CP y del radio de la circunferencia.

$$\text{Pot}(P,C) = \overline{PA}\,\overline{PB} = (d-r)(d+r) \Rightarrow \text{Pot}(P,C) = d^2 - r^2$$



$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Si:} & P \in C \Leftrightarrow \text{Pot}(P,C) = 0 \\ & P \text{ es exterior a } C \Leftrightarrow \text{Pot}(P,C) > 0 \\ & P \text{ es interior a } C \Leftrightarrow \text{Pot}(P,C) < 0 \end{array}}$$

Veamos la expresión analítica de la potencia de un punto respecto de una circunferencia:

C) $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ $\begin{cases} C(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \\ r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \end{cases}$ y $P(x_0, y_0)$

$$\Rightarrow \text{Pot}(P,C) = d^2 - r^2$$

$$\Rightarrow \text{Pot}(P,C) = (x_0 + \frac{a}{2})^2 + (y_0 + \frac{b}{2})^2 - (\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c)$$

$$\boxed{\Rightarrow \text{Pot}(P,C) = x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c}$$

Quiere decir que el valor numérico de la potencia de un punto respecto de una circunferencia es igual al que toma el primer miembro de la ecuación de la circunferencia en coordenadas cartesianas ortogonales, cuando se sustituyen x e y por las coordenadas del punto.

Aplicación 1 – Clasificar P(1,-3) respecto de
C) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ [Pot(P, C) = - 15]

Aplicación 2 – Si la circunferencia de la primera figura de esta página es C) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ y P(1,2), hallar la medida del segmento PT.
[$\overline{PT} = \sqrt{2}$]

Práctico N°6

01.- Halla las ecuaciones de las siguientes circunferencias:
a) centro (3,0) y radio 2 b) centro (4,-5) y radio 3 c) de centro (1,-4) que pasa por (2,-3)

02.- Investiga si las siguientes ecuaciones representan circunferencias reales y en caso afirmativo hallar centro y radio:
a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 10 = 0$ b) $x^2 - y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$ d) $x^2 + y^2 + xy - x + 4y - 8 = 0$

03.- Estudia la posición de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ con respecto a las siguientes rectas:
a) $x + y - 3 = 0$ b) $2x - y - 1 = 0$ c) $y - 3 = 0$

04.-Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto (3,5) y que es tangente a la recta
4x + 3y – 2 = 0.

05.- Escribe la ecuación de la circunferencia circunscripta al triángulo de vértices A(1,0), B(1,4) y C(4,1).

06.- Halla las ecuaciones de las tangentes por Q (3,-5) a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 9 = 0$.

07.- Determina la posición del punto S (1,2) respecto a las siguientes circunferencias:
a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 5 = 0$ c) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$

08.- Calcula la potencia del punto P (6,-8) respecto a la circunferencia C) $x^2 + y^2 - 4x + 20 = 0$. Halla la ecuación de la circunferencia C′ de centro P y radio R tal que R^2 = Pot (P, C).

09.- Dadas las circunferencias C) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 10 = 0$ y
C′) $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$
a) Halla la intersección de ambas circunferencias.
b) Encuentra un punto de la recta $2x + y - 1 = 0$ que tenga la misma potencia respecto de ambas circunferencias.

10.- Halla la ecuación de la circunferencia de radio $\sqrt{8}$ que tiene el centro en la recta $y = 2x$ y es tangente a la recta $x + y - 2 = 0$.

11.- Halla la ecuación de la circunferencia que es tangente a las rectas $x + y + 4 = 0$ y $7x - y + 4 = 0$ y que tiene el centro en la recta $4x + 3y - 2 = 0$.

12.- Halla los vértices del triángulo RST del que se sabe que: la ecuación de la cfa que pasa por R, S y T es $x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$, la altura respecto al vértice S es h) 2x+y-3=0, S es un punto del eje y, T es un punto del eje x de abscisa positiva.