Repartido 5 **6º Medicina**

Teórico para el práctico Nº5
Continuidad

Definición

$f : A \subset \Re \to \Re$ es continua en a, con $a \in A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) \in \Re \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \end{cases}$

Continuidad lateral

$f : A \subset \Re \to \Re$ es continua en a^+ con $a \in A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \in \Re \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a) \end{cases}$

$f : A \subset \Re \to \Re$ es continua en a^- con $a \in A \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

Teorema
Si f es continua en $x = a$ y g es continua en $x = a$, entonces:
1. $(f + g)$ es continua en $x = a$.
2. $(f.g)$ es continua en $x = a$.
3. (f / g) es continua en $x = a$ si $g(a) \neq 0$.

Continuidad de la función compuesta
Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a

Observaciones
1. $f : f(x) = k$ con $k \in \Re$ es continua para todo $a \in \Re$.
2. Las funciones polinómicas reales son continuas para todo $a \in \Re$.
3. $f : f(x) = b^x$ con $b \in \Re^+$ es continua para todo $a \in \Re$, en particular $f : f(x) = e^x$ es continua para todo $a \in \Re$.
4. $f : f(x) = \log_b x$ con $b \in \Re^+ \; y \; b \neq 1$ es continua para todo $a \in \Re^+$, en particular $f ; f(x) = Lx$ es continua para todo $a \in \Re^+$.
5. $f : f(x) = |x|$ es continua para todo $a \in \Re$.

Continuidad en un intervalo
1. f es una función, (a,b) está incluido en su dominio
f es continua en $(a,b) \Leftrightarrow f$ es continua $\forall x \in (a,b)$.
2. f es una función, $[a,b]$ está incluido en su dominio

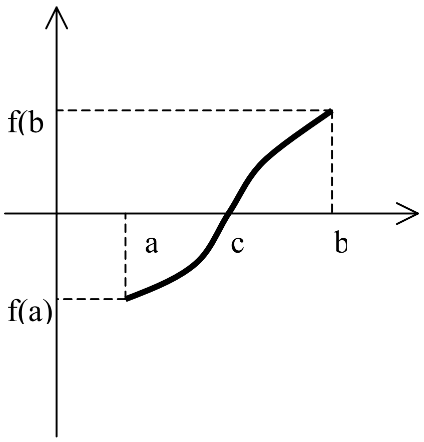
f es continua en $[a,b] \Leftrightarrow \begin{cases} f \; es \, continua \;\; en \; (a,b) \\ f \; continua \, en \, a^+ \\ f \; continua \, en \, b^- \end{cases}$

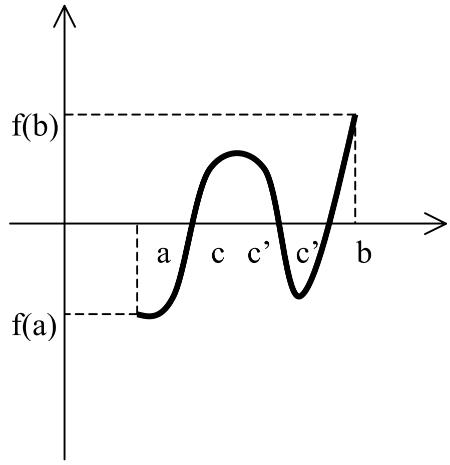
Teorema de Bolzano

$$\left. \begin{array}{r} f \; continua \;\; en \; [a,b] \\ f(a).f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) \,/\, f(c) = 0$$

Profesores: Gabriela Gaggero y Marcelo Pereira

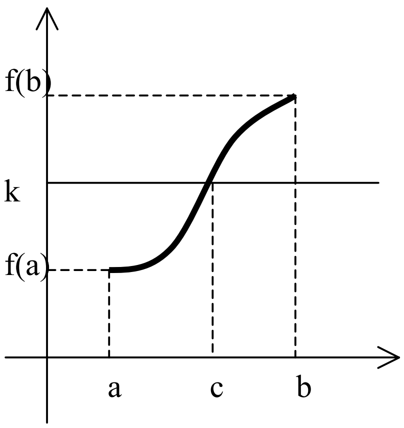
Repartido 5 **6º Medicina**

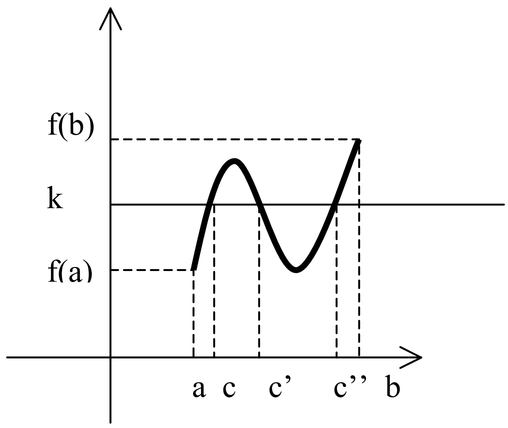




Teorema de Darboux

$$\left.\begin{array}{l} f \;\; continua\ en\ [a,b] \\ f(a) < k < f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \;\; \exists c \in (a,b) \,/\, f(c) = k$$





Funciones acotadas

Una función real f está acotada en su dominio si su recorrido es un conjunto acotado, o sea, si existen h y k reales tal que
$\forall x \in D(f):\ h \leq f(x) \leq k$
Si éste además tiene máximo M, decimos que M es el máximo de f y si tiene mínimo m, decimos que m es el mínimo de f.

Función acotada en un intervalo

1. f acotada en $[a,b] \Leftrightarrow \exists\ h\ y\ k \in \Re \ / \ \forall x \in [a,b],\ h \leq f(x) \leq k$
2. M es máximo de f en $[a,b] \Leftrightarrow \forall x \in [a,b],\ f(x) \leq M$ y
$\exists\ c \in [a,b] \ / \ f(c) = M$
3. m es mínimo de f en $[a,b] \Leftrightarrow$ ……………………………………………………………
………………………………..

Teorema de Weierstrass

$$f \;\; continua\ en\ [a,b] \;\; \Rightarrow \begin{cases} f \;\; acotada\ en\ [a,b] \\ existen\ el\ máximo\ y\ el\ mínimo\ de\ f\ en\ [a,b] \end{cases}$$

Profesores: Gabriela Gaggero y Marcelo Pereira

Práctico Nº5

1. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f: f(x)=\begin{cases} x+1 \Leftrightarrow x<1 \\ 2 \quad \Leftrightarrow x>1 \end{cases}$ en $x=0$ y en $x=1$

b) $f: f(x)=\begin{cases} 1-2x \Leftrightarrow x\geq 2 \\ -x \Leftrightarrow x<2 \end{cases}$ en $x=2$

2. Halla $a\in\Re$ para que las siguientes funciones sean continuas en su dominio.

a) $f: f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} \Leftrightarrow x\neq 2 \\ f(2)=a \end{cases}$ b) $f: f(x)=\begin{cases} \dfrac{Lx}{x^2-1} \Leftrightarrow x\neq 1 \\ f(1)=a \end{cases}$

c) $f: f(x)=\begin{cases} x+a \Leftrightarrow x\leq 2 \\ 2x-1 \Leftrightarrow x>2 \end{cases}$ d) $f: f(x)=\begin{cases} e^{-x^2}-4 \Leftrightarrow x\geq 0 \\ \dfrac{a}{x+1} \Leftrightarrow x<0 \end{cases}$

3. Hallar a y b de modo que f sea continua en $x=1$ (en caso de ser posible)

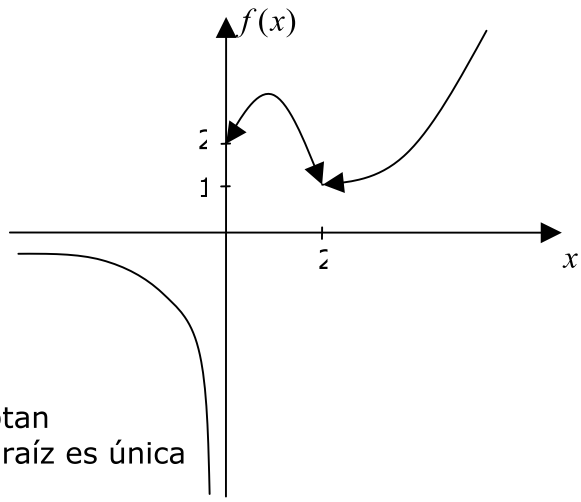
a) $f: f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax+b}{x-1} \Leftrightarrow x>1 \\ L|x-2|-3x+5 \Leftrightarrow x\leq 1 \end{cases}$ b) $f: f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax+3}{e^{\frac{1}{x-1}}} \Leftrightarrow x<1 \\ \dfrac{2x+b}{x} \Leftrightarrow x\geq 1 \end{cases}$

4. Dada la gráfica de la función f

a) Halla $D(f)$

b) Estudiar la continuidad de f

c) Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$



5. Probar que las siguientes funciones aceptan una raíz entre 0 y 1. Aceptando que dicha raíz es única calcularla con error menor que 0,1.

a) $f: f(x)=x^3+3x-1$ b) $f: f(x)=2.e^x-2x-3$ c) $f: f(x)=x+Lx$

Profesores: Gabriela Gaggero y Marcelo Pereira