Teórico para el práctico 7

Parábola

Definición:

Dados en un plano una recta y un punto que no le pertenece, llamamos parábola al lugar geométrico de los puntos de ese plano que equidistan de la recta y del punto.

- La recta recibe el nombre de directriz de la parábola y la notaremos con z.
- El punto recibe el nombre de foco de la parábola y lo notaremos con F.
- Si $F \in z \Rightarrow$ el L.G. es la recta j, $j \perp z \wedge F \in j$ (carece de importancia este lugar).
- $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(M, F) = d(M, z)$

Por lo tanto por cada recta perpendicular a la directriz de una parábola hay un punto, y solo uno, de ella.

Propiedades:

1.- Las rectas r tienen infinitos puntos exteriores, infinitos interiores y solo uno de la parábola.

- Sea $I \in op\overrightarrow{MB} \Rightarrow$ En $\overset{\Delta}{FMI}$: $d(I, F) < d(I, M) + \underbrace{d(F, M)}_{d(M, B)} = d(I, B) = d(I, z) \Rightarrow d(I, F) < d(I, z) \Leftrightarrow$ I es int a $\mathcal{P}$
- Sea $E \in \overrightarrow{MB} \Rightarrow$ En $\overset{\Delta}{FME}$: $d(E, F) > \underbrace{d(M, F)}_{d(M, B)} - d(M, E) = d(E, B) = d(E, z) \Rightarrow d(E, F) > d(E, z) \Leftrightarrow$ E es ext a $\mathcal{P}$

2.- Las rectas med(BF) son tangentes a la parábola.

- Sea $K, K \in med(BF), K \neq M \Rightarrow d(K, F) = d(K, B) > d(K, z) \Rightarrow d(K, F) > d(K, z) \Leftrightarrow$ K es ext a $\mathcal{P}$

3.- La parábola no tiene tangentes paralelas.

Las tangentes a una parábola son las mediatrices de los segmentos FB [($\forall$B), B$\in$z].

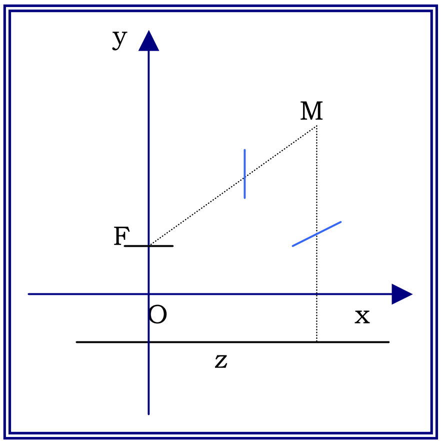
4.- La parábola tiene un eje de simetría (e) y un vértice.

ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA

Definición: Dada una parábola P, llamamos parámetro de la misma, a un número real p tal que su valor absoluto sea la distancia entre el foco y la directriz de la parábola.

Notación: p, $p\in\Re$, parámetro de P $\Leftrightarrow$ $|p| = d(F, z)$

1) Ecuación de la parábola de eje Oy (Ox) y vértice O(0, 0).



Datos: $\begin{cases} F(0, \frac{p}{2}) \\ z)\ y = -\frac{p}{2} \end{cases}$

Sea M(x, y), M $\in$ P $\Leftrightarrow$ d(M, F) = d(M, z)

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-\tfrac{p}{2})^2} = \frac{\left|y+\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{0^2+1^2}} \Leftrightarrow x^2+(y-\tfrac{p}{2})^2 = (y+\tfrac{p}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - py = py \xleftrightarrow[p\neq 0]{} \boxed{y = \frac{1}{2p}x^2} \Rightarrow \boxed{y = ax^2 \ \ a \neq 0}$$

Recíproco: Partimos de $y = ax^2$ con $a\neq0$

$$\Leftrightarrow ax^2 = y \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{a}y \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2a}y + \frac{1}{2a}y \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2a}y = \frac{1}{2a}y \Leftrightarrow x^2 + (y - \frac{1}{4a})^2 = (y + \frac{1}{4a})^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-\frac{1}{4a})^2} = \sqrt{(y+\frac{1}{4a})^2} \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-\frac{1}{4a})^2} = \left|y+\frac{1}{4a}\right| \Leftrightarrow d(M,R) = d(M,q)$$

De esta forma queda probado que los puntos cuyas coordenadas verifican la ecuación inicial son los puntos de una parábola de foco R y de directriz q (ya que, por la ecuación final, equidistan del punto fijo R, de coordenadas (0, 1/4a) y de la recta fija q, de ecuación y + 1/4a =0).

$$P)\ x = ay^2 \Rightarrow \text{foco } F(\frac{1}{4a}, 0), \text{ directriz } z)\ x + \frac{1}{4a} = 0 \text{ y, por supuesto, eje Ox y vértice } O(0,0)$$

2) Ecuación de la parábola de eje paralelo Oy (Ox).

	P) $y = ax^2$	P) $y = ax^2 + bx + c$
Vértice	$V(0, 0)$	$V(x_0, y_0) \to V(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$
Eje	e) $x = 0$	e) $x = x_0 \to$ e) $x = -\frac{b}{2a}$
Foco	$F(0, \frac{1}{4a})$	$F(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2+1}{4a})$
Directriz	z) $y = -\frac{1}{4a}$	z) $y = \frac{4ac-b^2-1}{4a}$
Podaria	p) $y = 0$	p) $y = \frac{4ac-b^2}{4a}$

Ecuación de la parábola de eje paralelo a Ox es P) $x = ay^2 + by + c$.

Repartido 7 **6º Ingeniería Mat B**

Práctico 7

01.- Determinar los elementos de las siguientes parábolas:

a) $y^2 = 6x$ b) $x^2 = 5y$ c) $y = \frac{x^2}{4} + x + 2$ d) $x = 4y^2 - 8x + 7$

02.- Hallar la ecuación de la parábola en cada caso:

a) Foco F (4,3) y directriz z) x-5=0
b) Foco F (0,-1) y directriz z) 4y-4=0
c) Foco F (4,3) y directriz z) x+y-1=0
d) Vértice V(6,-3) y directriz z) 3x-5y+1=0
e) Vértice V(3,4) y foco F(3,6)

03.- Una circunferencia cuyo centro es el punto (4,-1) pasa por el foco de la parábola de ecuación $x^2 + 16y = 0$. Demostrar analíticamente que la circunferencia es tangente a la directriz y hallar el punto de contacto.

04.- Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje $\overrightarrow{Ox}$ y que pasa por los puntos (0,0), (8,-4) y (3,1).

05.- Hallar la ecuación de la familia de parábolas que tienen foco común F(3,4) y eje común paralelo a $\overrightarrow{Oy}$.

06.- Hallar la ecuación de la parábola de vértice V(4,-1), cuyo eje es la recta y+1=0 y que pasa por A(3,-3).

07.- Hallar la intersección de la recta r) x-y-2=0 con la parábola $\mathbb{P}$) $x^2 + x - y - 3 = 0$.

08.- Probar que si la parábola tiene ecuación de la forma $x = ay^2 + by + c$ entonces la tangente será: $t)\ y = mx + \frac{(bm-1)^2 - 4acm^2}{4am}$ donde m es el coeficiente angular de la recta tangente.

09.- Hallar la ecuación de la tangente t a la parábola $\mathbb{P}$) $y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$ siendo t perpendicular a la recta r) 2x+y+7=0.

10.- Hallar las ecuaciones de la tangente en los siguientes puntos a las siguientes parábolas:

a) $A(1,2),\quad y^2 - 4x = 0$ b) $B(-6,3),\quad y^2 + 4x + 2y + 9 = 0$
c) $C(-3,3),\quad y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$ d) $D(-2,1),\quad x^2 - 6x + 5y - 11 = 0$

11.- Dada la parábola $\mathbb{P}$) $y^2 - 8x = 0$, hallar los valores de *k* para los cuales las rectas de la familia x+2y+*k*=0: a) cortan a la parábola en dos puntos.
b) son tangentes a la parábola.
c) no cortan a la parábola.

Profesores: Gabriela Gaggero - Marcelo Pereira