Instituto Crandon - Examen de Matemática B 6° Ingeniería. – 30/09/2014

Reglamentados: ejercicios 1 al 4. Eximidos: ejercicios 3 y 4.

1) i) Sea ABC un triángulo rectángulo en A. La recta AC es $r)\ 3y-2x-7=0$.
$M\left(2\ ,\ \frac{3}{2}\right)$ es el punto medio $\overline{AB}$. La ordenada del punto C es -1.
Hallar las coordenadas de los puntos A, B , C y calcular el área del triángulo ABC.
ii) Construir un segmento que mida exactamente $\sqrt{\frac{57}{2}}$ cm. Justificar.

2) i) Trazar una circunferencia **C** y una recta **r** exterior.
Construir (ubicar) el polo **P** de la recta **r** respecto a la circunferencia **C**.
Dicho de otra forma, **r** es la polar de **P** respecto a **C**. Justificar.

ii) Representar gráficamente la zona delimitada por la siguiente inecuación:
$$\left(x^2+y^2-4x+4y\right).\left(2x^2+2y^2+12x+10\right).(y)\ \leq\ 0$$

3) i) Hallar la ecuación de una circunferencia que pasa por (0,4), por (0, -2) y es tangente a la recta $3y+2x+14=0$. Además, la abscisa del centro es un número entero.
ii) Sean las circunferencias $\mathscr{C})\ x^2+2m^2x+y^2+2my-2y+m^4+m^2-2m=3-m^2$.
Investigar para qué valores de m existen circunferencias.

iii) Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias de la parte ii), teniendo en cuenta lo anterior. Graficar y limitar.

iv) Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el origen y cuyas asíntotas son las rectas y-x+3=0 , 2y+4x+1=0.

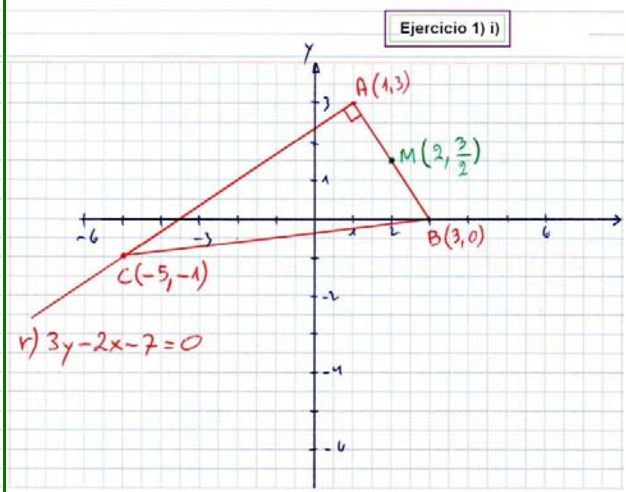
4) i) Discutir género y degeneramiento, según λ, de la siguiente familia de cónicas:
$K)\ x^2+\lambda xy+\lambda y^2+\lambda y+1=0$. Escribir las ecuaciones de las cónicas degeneradas y de ser posible, graficarlas.

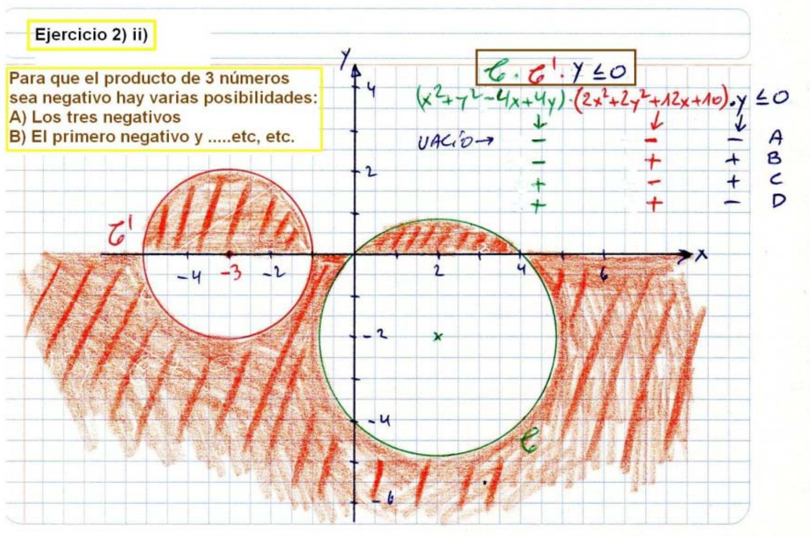
ii) En un par de ejes ortogonales, graficar la recta **r**) x+y=0 y ubicar el punto **A**(1,3).
Encontrar, sólo con regla y compás, por lo menos 4 puntos diferentes del plano que se encuentren, cada uno, a la misma distancia de la recta **r** y del punto **A**. Justificar.

iii) Con la recta **r**) x+y=0 y el punto **A**(1,3), encontrar el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de **r** y **A**. Reconocerlo.

iv) Hallar la envolvente de $mx.(1-m)=3mx+2my+2y+2m$. Graficar.

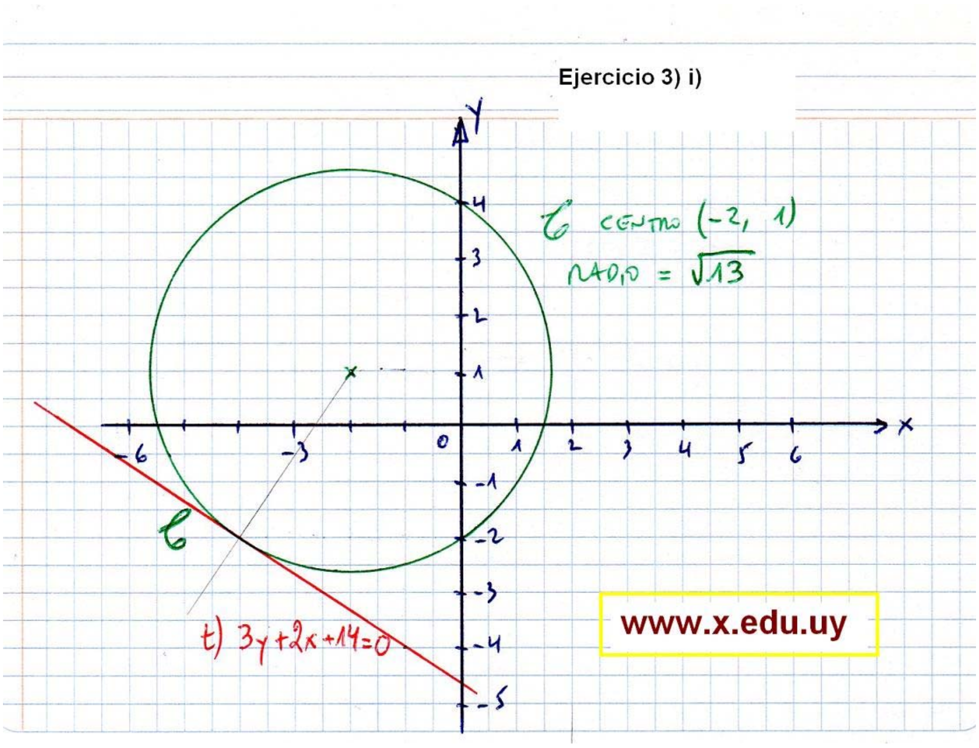
Soluciones





1) ii) $\sqrt{\frac{57}{2}} = \sqrt{\frac{114}{4}} = \frac{\sqrt{114}}{2} = \frac{\sqrt{5^2+5^2+8^2}}{2}$ Hay muchas otras maneras de hacerlo.

Ejercicio: 3)i)



3) ii) La ecuación de $\mathscr{C}$ se puede escribir:

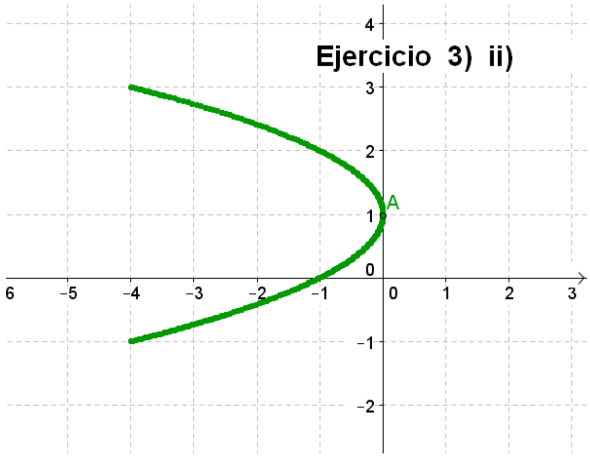
$$(x+m^2)^2 \; + \; (y-1+m)^2 \; = \; -m^2+4$$

Hay circunferencias si $-m^2+4>0$.
Entonces m deberá estar entre -2 y 2.

El lugar geométrico de los centros:

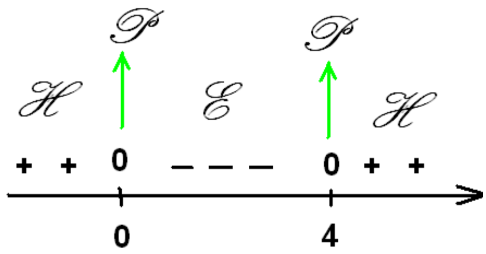
$$\alpha=-m^2, \; \beta=1-m, \; (\alpha,\beta)=(x,y)$$

entonces $x=-(y-1)^2$.
Considerando que m varía entre -2 y 2, queda:



iv) (y-x+3).(2y+4x+1)=3 desarrollando queda: -4x² + 2x y + 2y² + 11x + 7y = 0

4) La discusión del género según λ es :



Además las cónicas degeneran para $\lambda=0$ y para $\lambda=2$.

Para $\lambda=0$ tenemos una parábola degenerada, cuya ecuación es $K_0)\; x^2+1=0$

Para $\lambda=2$, $K_2)\; x^2+2xy+2y^2+2y+1=0$ que se puede escribir como:

$\left(x^2+2xy+y^2\right)+\left(y^2+2y+1\right)=0$, que se lo mismo que: $\left(x+y\right)^2+\left(y+1\right)^2=0$

Esto es el punto (1,-1).

iii) x² - 2xy + y² - 4x - 12y +20=0 Es una parábola, por la definición de la misma.

iv) (x + 1)² + (y + 1)² = 1 Circunferencia de centro (-1,-1) y radio 1.